Научно-исследовательский центр психологии и развития человека
«НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

Нагибина Н.Л., Нагибин М.Л.

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

диалоги ученика с учителем и психологом

МОСКВА 2023

УДК 514, 373.31
ББК 74.262.21

Рецензент:
доктор психологических наук,
заслуженный профессор МГУ им. М.В. Ломоносова
Ильясов Илья Имранович

Принято на заседании Ученого совета Научно-исследовательского центра психологии и развития человека «Новые технологии» 15 августа 2023 года

Нагибина Н.Л., Нагибин М.Л.
Основы геометрии для школьников. Диалоги ученика с учителем и психологом / Н.Л. Нагибина, М.Л. Нагибин. – Москва: Научно-исследовательский центр психологии и развития человека «Новые технологии». 2023 – 120 с.

В книге рассматриваются основные вопросы, связанные с особенностями математического мышления и математического языка. Даны представления об основных элементах таких фигур как треугольник, четырехугольник и круг.
Учебное пособие предназначено ученикам, учителям, школьным психологам и всем, интересующимся проблемами методов обучения математике.

ISBN 978-5-6046908-0-2

ISBN 978-5-6046908-0-2
9 785604 690802

© Нагибина Н.Л., 2023
© Нагибин М.Л., 2023
© Научно-исследовательский центр психологии и развития человека «Новые технологии», 2023
ISSN 2411-5923

Введение

Дорогие ученики и учителя! Эти диалоги мы написали как ответы на вопросы учеников, которые приходят к школьному психологу или учителю на дополнительные занятия со своими проблемами в обучении математике.

Школьный учитель обычно очень привязан к программе и рекомендуемым учебникам. У него сидит от двадцати до тридцати учеников в классе, и часто нет возможности ответить на все возникающие вопросы учеников.

Книжка, которую вы держите в руках – попытка помочь ученику, учителю и школьному психологу в решении возникающих учебных проблем.

Мы постарались сконцентрироваться на самом важном. Ограничили объем учебной информации до минимально необходимого каждому ученику для сдачи экзаменов.

Диалоги ученика и школьного психолога направлены на понимание особенностей математической логики и математического языка.

Для тех, кто не любит читать, все диалоги этой книги переведены в формат учебных фильмов и размещены в свободном доступе на площадке МатСтрим.

Надеемся, что эта книга поможет вам освоить основы языка геометрии и геометрической логики доказательств. Желаем удачи!

СОДЕРЖАНИЕ

Психология освоения геометрии

1. ОСОБЕННОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ 6
2. КАК ЧИТАТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ 10
3. СТУПЕНИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ 16
4. ПОИСК СКРЫТЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ 21

Треугольники

1. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКОВ 28
2. ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО УГЛЫ 34
3. ТРЕУГОЛЬНИКИ: ВЫСОТА 41
4. ТРЕУГОЛЬНИКИ: БИССЕКТРИСА 50
5. ТРЕУГОЛЬНИКИ: МЕДИАНА 55
6. ТРЕУГОЛЬНИКИ: СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ 59
7. ТРЕУГОЛЬНИКИ: ПОДОБИЕ. 65
8. ТРЕУГОЛЬНИКИ: ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ТЕОРЕМА СИНУСОВ 72

Четырехугольники

1. ВИДЫ И СВОЙСТВА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ 80
2. ПЕРИМЕТР И ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ 88

Окружность и круг

1. ЭЛЕМЕНТЫ ОКРУЖНОСТИ И КРУГА 93
2. УГЛЫ И ИХ ДУГИ 101

ОСОБЕННОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

ПСИХОЛОГИЯ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

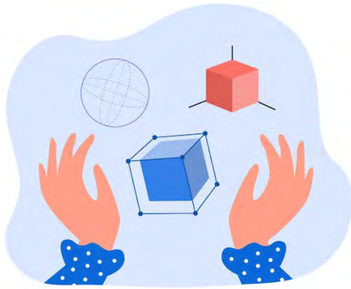
ОСОБЕННОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Учитель
- Геометрия – это особый раздел математической науки, и он требует особого геометрического мышления от ученика.

Ученик
- Наверное, тогда и особых способностей.

Учитель
- Совершенно верно. И особых способностей.

Ученик
- А какие способности нужны для изучения геометрии? Кроме, конечно, внимательности и аккуратности.



Учитель
- Для решения геометрических задач очень важно пространственное воображение.

Ученик
- Поясните на примере, о чем идет речь.

Учитель
- Собирание из пазлов целостной картины, легкость в освоении разного рода конструкторов, умение создавать планы местности и разного рода чертежи, успешность в освоении пространственных игр, в том числе игр в шашки и шахматы, умение на одной картине найти все одинаковые, часто спрятанные, детали.

Ученик
- Предположим, все это у меня получается, а значит, такая способность у меня есть.

Учитель
- Очень важная способность для освоения геометрии – умение видеть логику фигуры, опираясь на законы пространства.

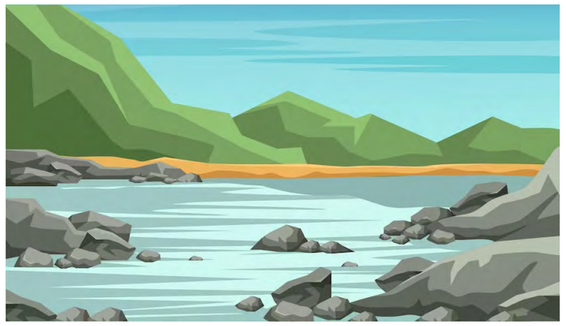
Ученик
- Эти законы еще знать нужно.

Учитель
- Именно их вы и будете изучать в курсе геометрии. Важно не только их знать, но уметь их видеть в чертеже и применять в своих рассуждениях.

Ученик
- Как-то все заумно, поясните на каком-нибудь примере.

Учитель
- Попробую пояснить на метафорическом образе. Представь бурный поток, который тебе нужно перейти. Из воды выступают камни. По этим камням, как по опорам, можно перейти реку. Нужно только рассчитать, сможешь ли ты перескочить с одного на другой так, чтобы не упасть и сухим добраться до противоположного берега.

Ученик
- Что-то мудреный образ. Пока я не совсем вас понимаю.



Учитель
- Я пытаюсь представить в образе геометрическую логику. Есть начало задачи, есть финал, к которому нужно прийти. В качестве опор – промежуточные геометрические законы, опираясь на которые ты последовательно идешь к цели. При этом у тебя часто есть выбор этих опор, различных вариантов движения. Кратчайший путь, конечно, всегда предпочтительней. Но главное – достичь цели и не свалиться в поток.

Ученик
- Эти опоры еще увидеть нужно.

Учитель
- Если ты знаешь правила и законы, то увидеть их намного проще.

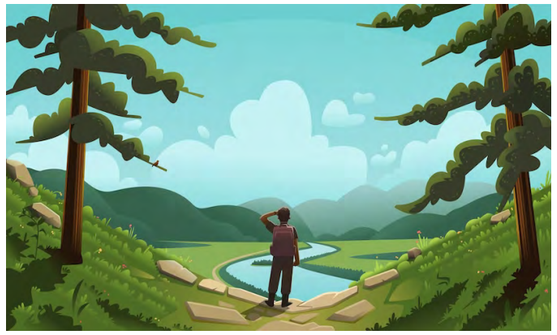
Ученик
- А если ты правила забыл?

Учитель
- Тогда нужно вспоминать или самому эти правила выводить, опираясь на дополнительные «камни», законы и правила, которые помнишь.

Ученик
- Это может занять много времени и сил.

Учитель
- Так и есть. Но отчаиваться все равно не нужно. Нужно верить в свои силы.

Ученик
- Я как-то заблудился в лесу, но стал размышлять, ориентироваться по солнцу и, в конце концов, все же вышел на дорогу.



Учитель
- Очень хорошая аналогия. Подытожим наши размышления об особенностях геометрического мышления.

1. В геометрическом мышлении нужно видеть пространственную картину целого и его частей.

2. В геометрических задачах нужно уметь разбить свой путь к финальной точке на промежуточные этапы.

3. Промежуточные точки должны приближать нас к конечной цели.

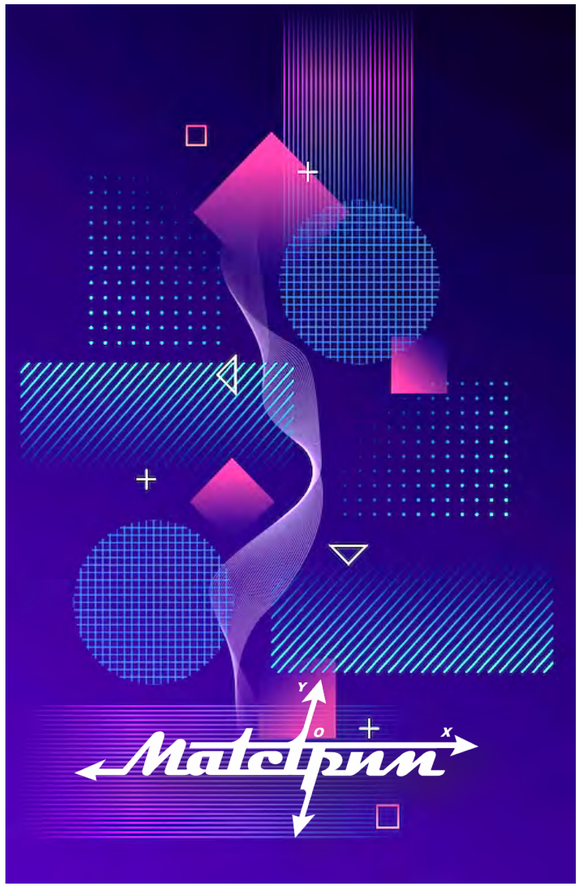
4. Переходы от одного этапа к другому должны происходить на основе известных геометрических законов, которые мы должны знать и хорошо помнить.

5. Если что-то забыл, отчаиваться не нужно. Часто к финишу ведет несколько разных путей.

6. Чем путь короче, тем он предпочтительней.

КАК ЧИТАТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ

ПСИХОЛОГИЯ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ



КАК ЧИТАТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ

Учитель
- Любая наука имеет свой особый язык, особенности и правила изложения своих мыслей. Геометрическая наука – не исключение. Знание этого языка и умение им пользоваться – отдельная часть обучения геометрии.

Ученик
- Да, это я понимаю. Читая какую-нибудь задачу, думаю, что писали ее люди, которые совсем не умеют сказать что-то простым русским языком. Текст задачи сразу пугает, а оказывается, что за ним скрывается самая простая вещь. Это же я могу сказать и про правила, и про их доказательства.

Учитель
- Доказательства теорем – это еще одна особенность геометрической науки, которую приходится осваивать ученикам.

Ученик
- Сколько же самых разных языков приходится мне осваивать! Русский, английский, алгебраический, геометрический. А еще я хожу в музыкальную школу – там свой язык, а еще я занимаюсь дзюдо – там свой язык и своя культура.

Учитель
- Про культуру ты хорошо подметил. Язык и культура тесно связаны между собой. Культура использования языка и его элементов – это очень важная часть геометрии. Когда ты читаешь задачу или теорему, ты должен ее понять.

Ученик
- Что значит «понять»?

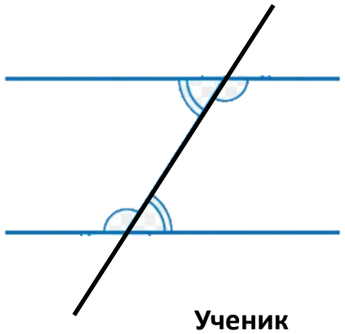
Учитель
- Условно говоря, перевести на обычный человеческий язык.

Ученик
- Объясните на примере.

Учитель
- Приведу пример. Читаем теорему о свойствах углов, образованных при пересечении параллельных прямых. Сразу отмечу, что эта теорема – одна из самых важных. Ее обязательно должен знать каждый ученик.

Ученик
- Понял. А как она звучит на геометрическом языке? Попробую ее перевести на человеческий язык.

Если две параллельные прямые пересечены третьей, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма односторонних углов равна 180 градусам.



Учитель
- Если две параллельные прямые пересечены третьей, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма односторонних углов равна 180 градусам.

Ученик
- Попробую переводить с геометрического на русский.

Учитель
- Не только на русский, но и на зримый.

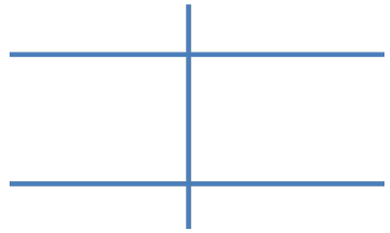
Ученик
- Как это?

Учитель
- Условно говоря, нарисованный в виде чертежа.

Ученик
- Хорошо. Буду сразу рисовать. Читаю: «Если две параллельные прямые». Значит, у нас есть две прямые линии и они параллельны. Вот уже и слово геометрическое. Параллельные у нас рельсы. Значит, линии прямые и похожие на рельсы.

Учитель
- Зрительные аналогии помогают освоить геометрический язык. Продолжай.

Ученик
- «Если две параллельные прямые пересечены третьей». Значит, эти линии-рельсы нужно пересечь шпалой.

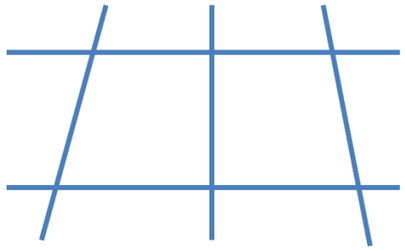


Учитель
- Только эта линия может быть по-разному расположена по отношению к рельсам. Главное условие, чтобы она их пересекала.

Ученик
- Понял. Нарисую варианты наклона этой линии.

Учитель
- Молодец. Часть теоремы ты уже перевел, продолжай.

Ученик
- «То внутренние накрест лежащие углы равны». Ого! Здесь речь идет об углах. Эти углы, вероятно, получились от пересечения параллельных прямых третьей.

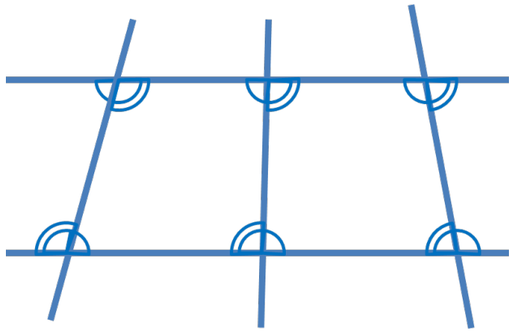


Учитель
- Мыслишь правильно. Продолжай.

Ученик
- Эти углы внутренние. Думаю, что они между параллельными прямыми или, точнее, внутри пространства между параллельными прямыми. Отмечу все внутренние углы на своем рисунке.

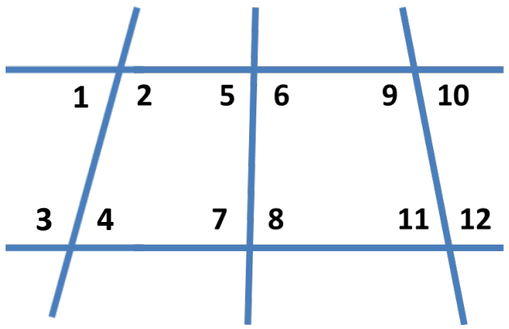
Учитель
- Продолжай.

Ученик
- Еще мы знаем, что они накрест лежащие. Скорее всего, из четырех внутренних углов, это самые противоположные.



Учитель
- Скажи по номерам.

Ученик
- 1 и 4, 2 и 3, 5 и 8, 6 и 7, 9 и 12, 10 и 11.



Учитель
- Молодец. Продолжай.

Ученик
- «А сумма односторонних углов равна 180 градусам». Это уже какое-то другое условие, другое правило.

Учитель
- Вообще-то, так и есть. Но тот, кто составлял учебник, решил соединить две разных теоремы в одну. Такое встречается. Не нужно этого пугаться. Просто разберись с этим еще одним правилом и все.

Ученик
- Итак, рисунок остается. Две параллельные прямые пересекаются третей. Речь идет об односторонних углах, то есть они лежат по одну сторону от прямой. Прямая - совпадает со сторонами развернутого угла. Сумма любых углов по одну линию от прямой равна 180 градусам. Это и ежу понятно. Так сумма углов 14 и 12 равна 180 градусам, Сумма углов 13 и 14 тоже 180 градусов. И так далее.

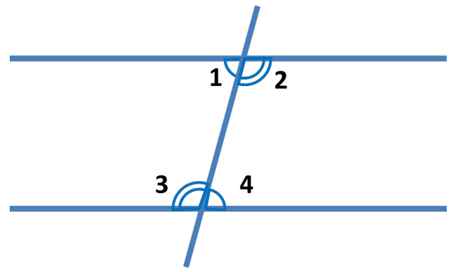
Учитель
- Но речь здесь, по-видимому, шла о внутренних односторонних углах. Так как все углы, о которых ты говорил, называются смежными.

Ученик
- Понял. Внутренние односторонние углы – это углы между параллельными прямыми, но с одной стороны прямой, которая их пересекает. И это не смежные углы. Это углы 2 и 4, 3 и 1 и так далее. Ну да, ну да! Угол 4 же равен углу 1, поэтому их сумма 180 градусов.

Учитель
- А теперь, попробуй, не глядя на рисунок, рассказать теорему. О чем она?

Ученик
- Если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны. При этом сумма любых односторонних углов равна 180 градусам.

Если две параллельные прямые пересечены третьей, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма односторонних углов равна 180 градусам.



$\angle 1+\angle 3=180°$
$\angle 2+\angle 4=180°$
Сумма односторонних углов равна 180°

$\angle 1=\angle 4$
$\angle 2=\angle 3$
Накрест лежащие углы равны

Учитель
- Молодец! Надеюсь, что ты навсегда запомнил эти правила.

Ученик
- Не такой уж и трудный этот геометрический язык. Просто нужно включить воображение и немного подумать над каждой фразой, представив ее на чертеже.

СТУПЕНИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Психология изучения математики в школе

СТУПЕНИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Учитель
- В геометрии есть логика геометрической мысли.

Учитель
- Мы уже с тобой сравнивали решение геометрических задач с работой следователя, который должен выстроить всю картину преступления. Он приводит неопровержимые доказательства того, что именно так все и происходило.

Ученик
- Геометрия пугает нагромождениями доказательств, разных теорем и аксиом. Нельзя ли попроще?

Ученик
- Это я понял. Но я не понял, зачем нужны бесконечные доказательства.

Ученик
- Да, припоминаю.

Учитель
- Решая геометрическую задачу, ты выстраиваешь лестницу доказательств - то, что окончательный результат именно такой, а не какой-нибудь другой.

Учитель
- Совершенно верно. Геометрия учит тому, как правильно подойти к этому результату.

Ученик
- То есть, главное – подойти к единственно верному результату.

Ученик
- Что вы имеете в виду?

Учитель
- Представь лестницу. Ступени – это мысли. Материал, из которого построены ступени-мысли – это определения, правила, теоремы.

Ученик
- Представил лестницу со ступенями-мыслями. Но у меня в мыслях какое-то нагромождение непонятных правил и теорем.

Учитель
- Все правила и теоремы, чтобы быть строительным материалом, а не грудой строительного мусора должны быть упорядочены.

Ученик
- Что вы имеете в виду?

Учитель
- Представь, что у тебя строительный склад. Чтобы найти нужный товар, ты должен четко знать – здесь лежат доски, а здесь лежат гвозди, а в этом месте цемент и разного рода клей.

Ученик
- Понял. Но я не понимаю, как это связать с кучей теорем и аксиом.

Учитель
- Ты должен в голове иметь некие полки, на которые ты будешь складывать правила. У каждого своя удобная ему система полок, где ясно виден товар. На мой взгляд, должна быть полка про углы, полка про стороны, полка про площади. Думаю, что для начального этапа достаточно. Каждое правило должно быть видно. Есть очень значимые и часто употребляемые правила, они должны лежать на самом видном месте.

Ученик
- Понял. Это, так называемые, золотые правила.

Учитель
- Совершенно верно.

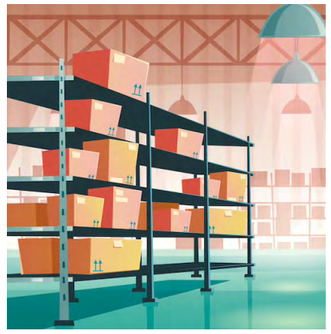
Ученик
- Но часто бывает, что правило и про площади, и про стороны, и про углы. Что с этим делать?

Учитель
- Ты же для себя упорядочиваешь все эти правила. Подумай, на какой полке его лучше будет искать. Если это очень важное и связующее все элементы фигуры правило - можешь положить его на все полки.

Ученик
- Лучше сделаю полку для таких очень важных, связующих все элементы правил.

Учитель
- Если так тебе удобней, то делай по-своему.

Ученик
- Итак, у меня есть упорядоченный склад теорем и определений, в котором мне легко ориентироваться.



Учитель
- Это очень важно для строительства геометрических доказательств. Вспомним про лестницу и результат, к которому она нас приведет.

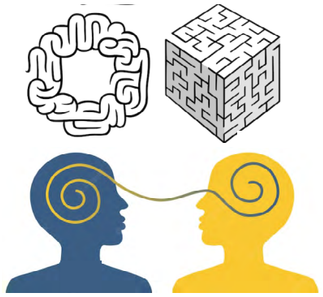
Ученик
- Помню. Ступени – мысли. Эти мысли могут меня далеко завести, и совсем не в ту сторону.

Учитель
- Ступени-мысли должны опираться на железную логику. То есть, должна быть последовательность перехода от одной мысли к другой, и все в направлении к цели. Опираясь на теорему такую-то, мы делаем вывод такой-то. Исходя из правила такого-то, мы получаем, что… И так до самой вершины.

Ученик
- А вершина – это наш результат.

Учитель
- Совершенно верно.

Ученик
-А эту «железную логику» переходов от одной мысли к другой, где мы должны брать?



Учитель
- Для многих ученых-математиков это были творческие задачи, требующие поиска и открытий. Но для школьника – это, как правило, стандартные задачи. Вся «железная логика» их решения уже известна. Для ученика – это задача на запоминание. А для тех, кто ее не запомнил – творческая задача на нахождение этой «железной логики» самостоятельно.

Ученик
- Понял. Значит, мне нужно готовить отдельные полки для «железных логик» решения задач.

Учитель
- Ты прав. Эти «железные логики» решения стандартных задач называют алгоритмами решения стандартных задач. Чем больше у тебя на полках памяти алгоритмов решения стандартных задач, тем ты успешнее в учебе.

Ученик
- То есть, для успешного освоения геометрической логики я должен иметь определенный упорядоченный запас правил и разного рода теорем, а также запас алгоритмов решения стандартных задач.

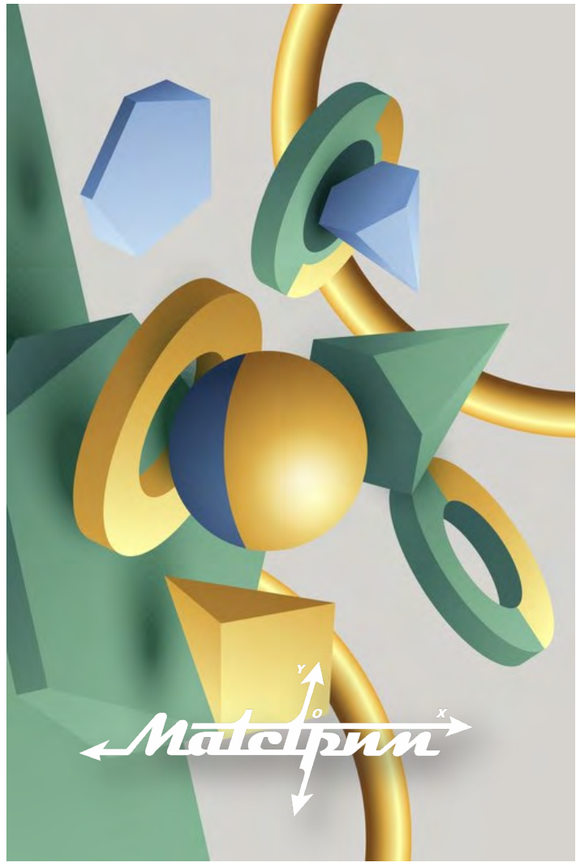
Учитель
- И натренироваться находить нужное правило и алгоритм на своих полках памяти. Здесь помогает тренировка.

Ученик
- Это как в шахматах – есть правила для движения каждой фигуры и стандартные партии. Их просто нужно помнить.

Учитель
- Надеюсь, что наша беседа тебе помогла понять логику геометрической мысли. Теперь осталось применить ее на практике.

ПОИСК СКРЫТЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

ПСИХОЛОГИЯ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ



ПОИСК СКРЫТЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

Ученик
- Многие геометрические задачи просто парализуют меня сразу же после их прочтения. Обилие терминов, разных латинских букв и обозначений пестрит перед глазами. Мозг отказывается разбираться в этой головоломке.

Учитель
- Здесь очень важен настрой на серьезную поисковую работу. Ты должен каждый раз представить себя в роли следователя, рисующего на доске всех подозреваемых, все улики, выстраивающих отношения между ними. Следователь уверен, что это поможет раскрыть всю картину преступления.

Ученик
- Никогда не хотел быть следователем.

Учитель
- Если тебе не нравится роль следователя, то представь себя каким-нибудь конструктором, на которого надеется его команда в решении сложного вопроса. Здесь главное – твой настрой.

Ученик
- Скажите просто, в чем состоит этот настрой?

Учитель
- Этот настрой состоит в том, что ты обязательно должен решить задачу. Стать героем для себя и для других.

Ученик
- Значит, настрой – это вера в свои силы и ответственность за решение задачи.

Учитель
- Да. Правильно. Это главное, но это не всё.

Ученик
- Ещё внимательность и аккуратность?

Учитель
- Совершенно верно. А еще – спокойное и сосредоточенное состояние души, чтобы нервы не мешали последовательному движению мысли.

Ученик
- А мне нервы очень мешают. Сразу после прочтения задачи начинаю психовать.

Учитель
- Просто ты привык, что истерика иногда помогает решить какую-нибудь социальную проблему. Устроил истерику – получил искомое. А здесь так не получится.

Ученик
- Просто мне трудно сосредотачиваться долго.

Учитель
- Еще что тебе трудно?

Ученик
- Поддерживать интерес. Скучно. Однообразно. Есть слова и определения, которые я забыл. Нужно искать или вспоминать.

Учитель
- Еще нужна смекалка. Какие-то яркие прозрения.

Ученик
- Прозрения о чем?

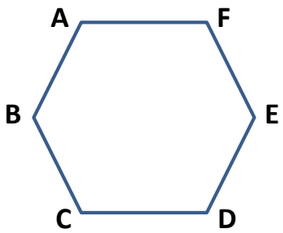
Учитель
- Ты как бы смотришь вокруг - что бы подставить, какую-то штуковину, чтобы «перелезть через проблему» стало легче.

Ученик
- Поисковая установка!.

Учитель
- Да. Мы опять пришли к самому началу. Настрой – это главное. Учеба требует терпения и силы воли. А еще поисковой установки на «зоркость глаза».

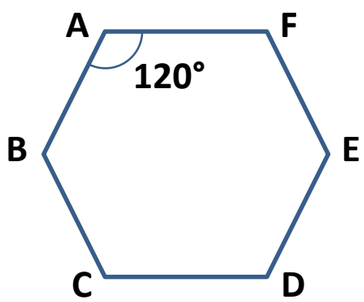
Ученик
- Что вы имеете в виду? Поясните на примере.

Учитель
- Нарисован правильный шестиугольник ABCDEF. Воспользуйся теоремой о сумме односторонних углов, чтобы найти сумму внутренних углов этого шестиугольника.



Учитель
- Молодец! Действуешь верно! Продолжай!

Учитель
- Начало положено. Продолжай. Я в тебя верю.



Ученик
- Представлю себя в роли инженера-конструктора, который должен найти и сообщить эту информацию для постройки межпланетной станции. Буду читать каждое предложение, и переводить текст задачи в наглядный образ.

Ученик
- Вспоминаю, что такое правильный шестиугольник. Думаю, что это шестиугольник, у которого все углы и стороны равны. Напоминает пчелиные соты. На всякий случай, проверю. Посмотрю в поисковике. Да. Так и есть. Углы этого шестиугольника обозначу буквами, которые вы мне задали.

Ученик
- - Снова читаю условие задачи. «Нарисован правильный шестиугольник ABCDEF. Воспользуйся теоремой о сумме односторонних углов, чтобы найти сумму внутренних углов этого шестиугольника». Нужно найти сумму внутренних углов шестиугольника. Думаю, что внутренний угол – это угол, который лежит внутри этого шестиугольника. На всякий случай, проверю в поисковике. Мне дают сразу ответ – внутренние углы правильного шестиугольника равны 120 градусам. Предположим, я этого не заметил. Хотя, легче двигаться вперед, когда правильное решение тебе известно. Углов-то шесть, значит, сумма внутренних углов шестиугольника равна 120 умножить на 6, то есть 720 градусов.

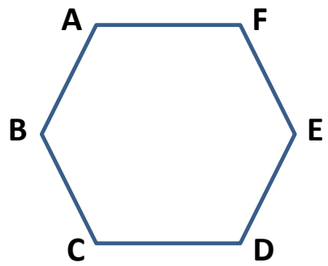
Учитель
- Предположим, у тебя нет возможности обращаться к поисковику.

Учитель
- Справедливости ради, такая подсказка есть не всегда. Иногда этот ключик к решению задачи нужно еще самому выбрать из списка известных тебе правил и теорем. Но в этот раз тебе повезло. Нужно только знать эту теорему.

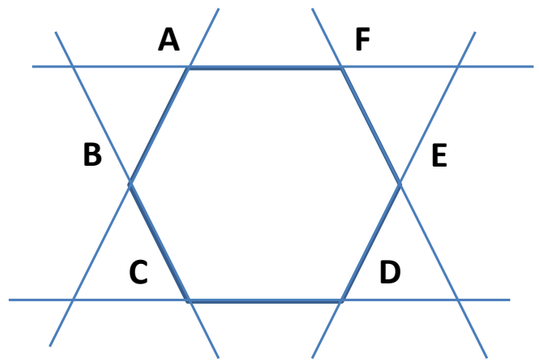
Учитель
- Я позволю, а вот позволят ли тебе другие? Какое-то количество правил ты должен знать наизусть, как таблицу умножения.

Ученик
- Тогда у нас есть подсказка – «воспользуйся теоремой о сумме односторонних углов».

Ученик
- Да. Вы правы. Нужно только знать эту теорему. Или постараться вспомнить ее, если забыл. Но я припоминаю, что одностороними углами называют углы внутри параллельных прямых при пересечении их секущей. Сумма односторонних углов равна 180 градусам. На всякий случай, проверю себя по поисковику, если вы мне позволите.



Ученик
- Проверил. Все так. Продолжаю. Ищу параллельные прямые. В правильном шестиугольнике противоположные стороны параллельны. Если эти стороны продлить, то получатся параллельные прямые. Этот ключик не указан в задаче. Я сам его нашел.



Учитель
- Это обычная история. Часто вообще не указан ни один ключик, а нужно понять весь лабиринт, и все двери. К каждой найти свой ключик. Перескочить часто невозможно. Нужно четко выполнять последовательность.

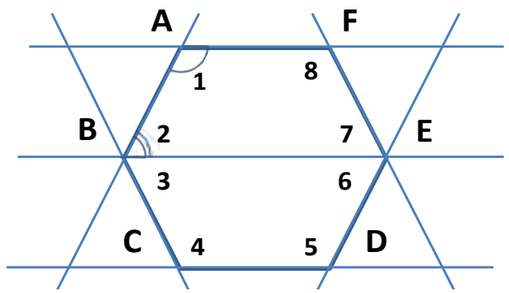
Учитель
- В геометрических задачах ты можешь позволить себе что-то достраивать или убирать, чтобы какие-то закономерности высветились яснее. Вспомни про зоркость глаза и поисковую установку, поиск дополнительных элементов, чтобы «перескочить через проблему».

Учитель
- Отлично. Продолжай.

Ученик
- Итак, что мы имеем. Правильный шестиугольник с продленными сторонами, это и есть параллельные прямые, пересеченные секущей. Мы знаем, что сумма односторонних углов равна 180 градусам. Но все равно чего-то не хватает.

Ученик
- Напрашивается еще одна параллельная линия BE в центре. Нужно только быть уверенным, что она параллельна AF и CD. Но поскольку она лежит на двух равноудаленных точках от этих прямых, то так и есть. Еще одна дверь с одним ключом найдены и открыты.

Ученик
- Тогда у меня появились новые односторонние углы, сумма которых равна 180 градусам. Складываю все четыре пары этих углов, или проще – умножаю 180 на 4 и получаю 720 градусов.



$\angle 1+\angle 2=180°$ $\angle 5+\angle 6=180°$
$\angle 3+\angle 4=180°$ $\angle 7+\angle 8=180°$

Учитель
- Что и требовалось доказать. Молодец! Осталось только грамотно описать всю логику твоих размышлений. Это тоже не-простая задача.

Ученик
- Нужно знать правила геометрического языка. Но задача-то решена?

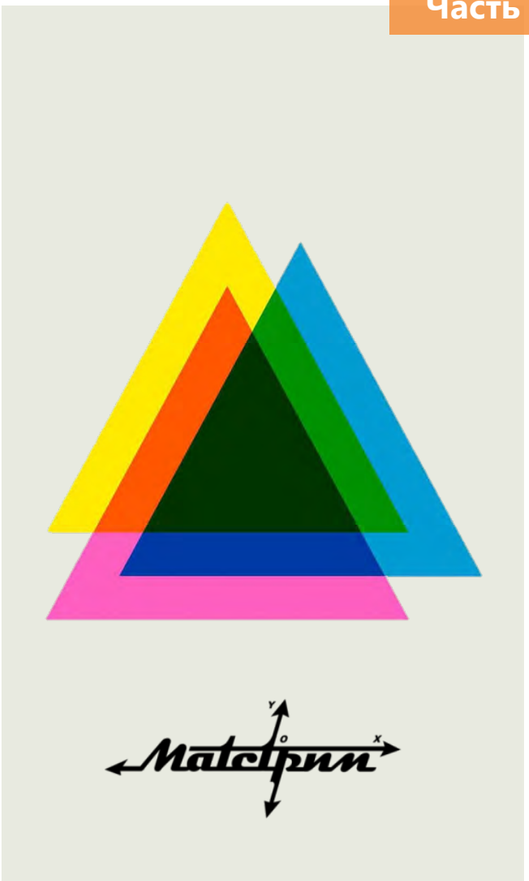
Учитель
- Иногда бывает, что задача решена, но изложил на бумаге ты решение таким безграмотным геометрическим языком, что учитель вынужден тебе снижать оценку.

Ученик
- Понял. Буду стараться. И во всем нужна воля, поисковая активность, внимательность и аккуратность.

ТРЕУГОЛЬНИК

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО СТОРОН

Часть 1



ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Ученик
- Вы можете сказать мне, в двух словах, зачем мы столько времени уделяем изучению геометрии в школе? Вы можете мне сказать, в чем суть геометрии?

Учитель
- Суть геометрии состоит в том, чтобы уметь планировать и строить, исходя из этих планов.

Ученик
- Что вы имеете в виду, когда говорите «уметь планировать»?

Учитель
- Рисовать план или чертеж какого-то предмета. При этом, чтобы чертеж был точным, нужно знать величины характеристик сторон или углов или еще чего-то, что поможет создать точный образ. Если все характеристики даны, то нарисовать чертеж просто, а в жизни мы сталкиваемся с тем, что какие-то характеристики мы знаем, а какие-то нам неизвестны.

Ученик
- Это там, где мы в задачах ставим вопрос?

Учитель
- Да. Там, где инженер или строитель ставит для себя вопрос. Однако за многотысячелетнюю историю культуры человечество придумало способы, как находить ответы на эти вопросы.

Ученик
- Да. Изучением этих способов мы и занимаемся на уроках геометрии.

Учитель
- Человечество придумало способы, как найти недостающие величины, чтобы воссоздать полный образ или чертеж.

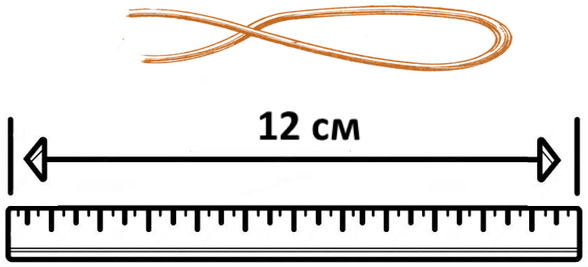
Ученик
- А вы можете пояснить на каком-нибудь простом примере свою мысль?

Учитель
- Попробую. Одна из основных фигур, которой посвящено больше половины занятий геометрии – это треугольник. С него и начнем.

Ученик
- Я согласен. Начнем с треугольника

Учитель
- Для наглядности возьмем небольшой кусок гибкой проволоки, пусть он будет 12 сантиметров длинной.

Ученик
- У меня есть такой кусок. Взял. Что с ним сделать? Создать из него треугольник?

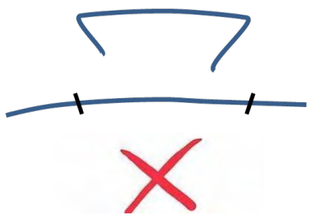


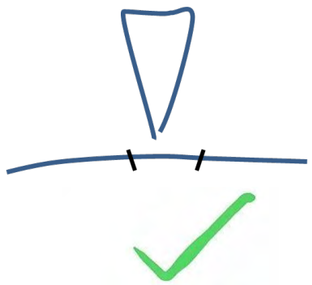
Учитель
- Совершенно верно. Попробуй создать из него треугольник, сумма сторон которого равнялась бы 12 сантиметрам.

Ученик
- Надо согнуть проволоку так, чтобы не было остатка. Сделаю два изгиба и соединю концы.

Учитель
- Выполняя эту задачу, на какие трудности ты наткнулся?

Ученик
- Чтобы не получилось разрыва, и концы соединились, нужно больше отступить от них для сгиба. Если отступишь мало – концы не соединятся, и получится разрыв.



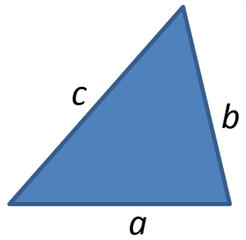


Учитель
- Подумай, с какого момента концы начинают соединяться.

Ученик
- С того момента, когда величина двух сторон, то есть их сумма становится больше чем оставшаяся другая сторона.

Учитель
- Великолепно. Ты сейчас путем проб и ошибок нашел главное правило треугольника Величина любой стороны треугольника всегда меньше суммы двух других его сторон.

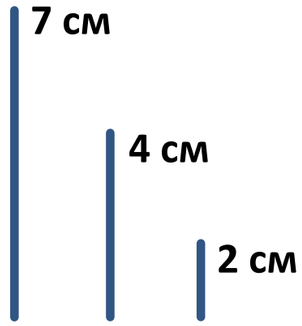
Величина любой стороны треугольника всегда меньше суммы двух других его сторон



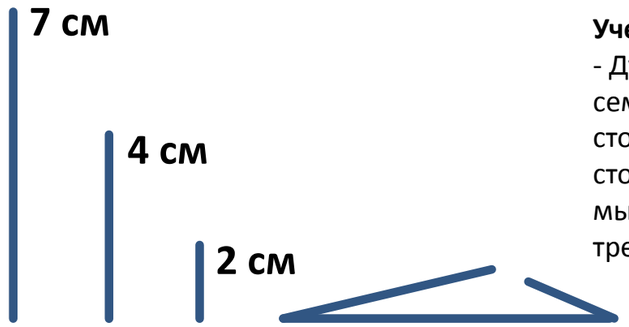
a + b > c

Учитель
- А теперь задача. У тебя есть набор из трех палочек. Длина их составляет 7 сантиметров, 2 сантиметра и 4 сантиметра. Можно ли из них сложить треугольник.

Ученик
- Да. Я суть понять могу.



Можно ли сложить треугольник?

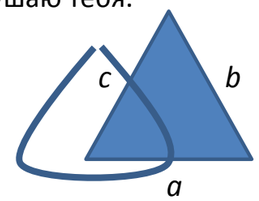


Ученик
- Думаю, что нет. 2 + 4 = 6. Шесть меньше семи. Правило о том, что сумма двух сторон треугольника больше третьей его стороны здесь не выполняется, поэтому мы не сможем составить из этих палочек треугольник.

Учитель
- Молодец! Ты сейчас путем логических выводов, используя правило, доказал, что для этих длин сторон задача не решается. В геометрии такой метод используют постоянно. А доказав логически какой-то общий вывод, математики называют его теоремой или правилом. Знание таких теорем очень помогает решать геометрические задачи.

Учитель
- Если говорить о сторонах треугольника, то в отдельную группу выделяются равносторонние треугольники и равнобедренные треугольники.

Учитель
- Слушаю тебя.



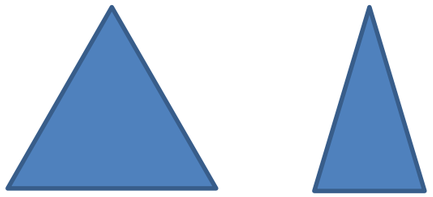
a = b = c

Учитель
- Молодец! Теперь осталось сказать, что мы будем называть равнобедренным треугольником.

Учитель
- Да. Равнобедренным называется треугольник, две стороны которого равны между собой.

Учитель
- Правильно. Подведем итог. Главное правило треугольника – сумма двух его сторон всегда больше величины третьей стороны. Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним, треугольник, у которого две стороны равны, называется равнобедренным.

Ученик
- Про стороны треугольника мне понятно.

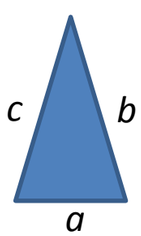


Ученик
- Кажется, я могу сказать, что называют равносторонним треугольником.

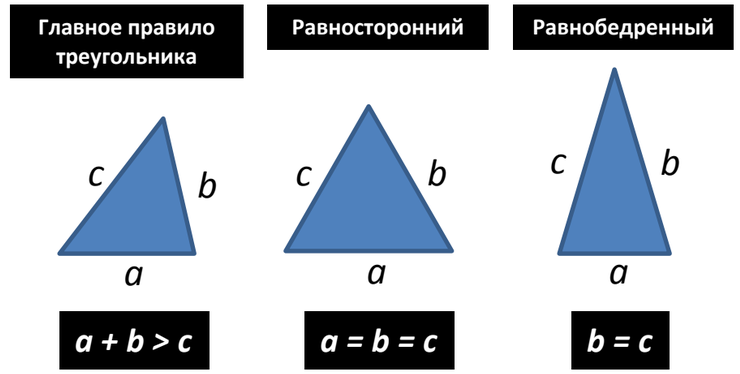
Ученик
- Равносторонним треугольником называют такой, у которого все стороны равны. Если у меня проволока 12 сантиметров, то каждая сторона моего равностороннего треугольника из этой проволоки будет 4 сантиметра.

Ученик
- По-видимому, треугольник, у которого равные бедра.

Ученик
- Например, стороны такого треугольника будут 5, 5 и 2 сантиметра.

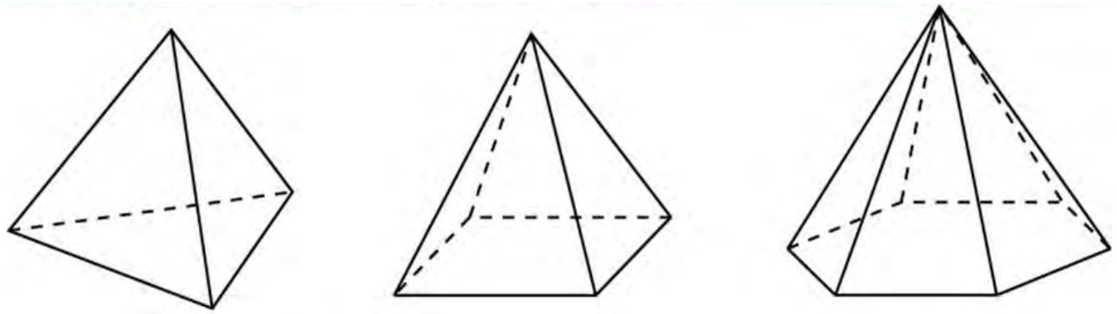


b = c



Ученик
- Треугольник, так же как четырехугольник и круг, является одной из главных фигур, из которых строится весь мир, окружающий нас. Геометрия позволит нам знать все свойства этих фигур и использовать эти знания в жизни.

Учитель
- Да. Любой чертеж – модель дома, карты местности, дизайна одежды и среды включает в себя эти фигуры.



ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО УГЛЫ

Часть 2

ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО УГЛЫ

Учитель
- Само название фигуры – «треугольник» - говорит о том, что в ней есть три угла. Речь сейчас пойдет именно о них.

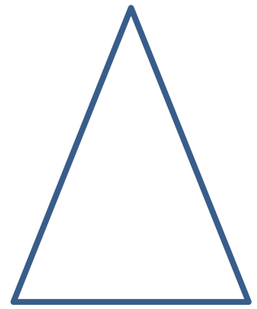
Ученик
- Что же в них такого удивительного, что о них нужен отдельный урок?

Учитель
- А вот мы сейчас и посмотрим. Возьми свою гибкую проволочку.

Ученик
- Взял. Что дальше?

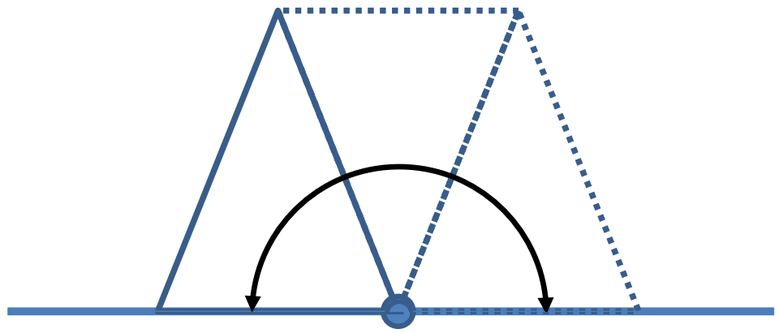
Учитель
- Сделай из нее любой треугольник.

Ученик
- Сделал.



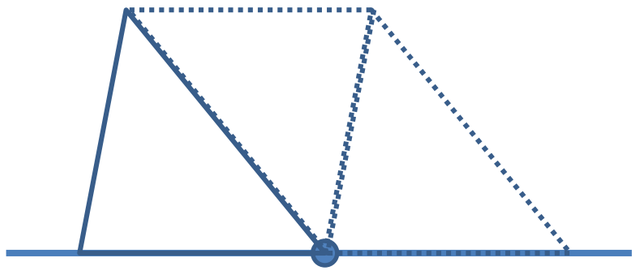
Учитель
- А теперь возьми бумажку, проведи прямую линию и поставь на этой линии точку. А теперь посчитай сумму всех его углов.

Ученик
- Получился развернутый угол или угол в 180 градусов.



180°

Ученик
- Сделал еще один треугольник. Результат тот же. Похоже, я могу сказать правило.



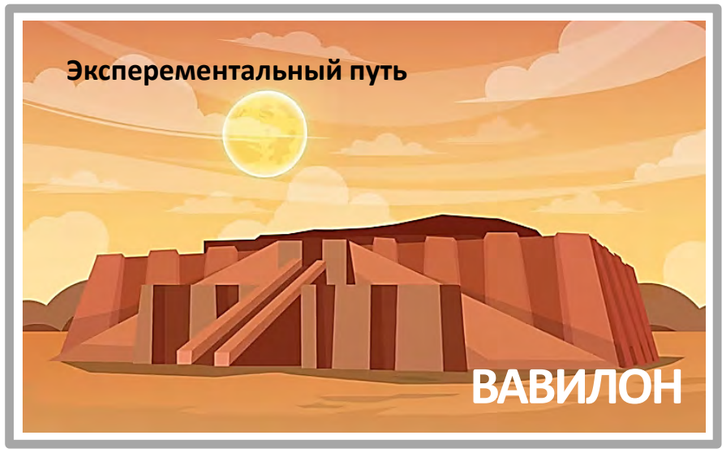
180°

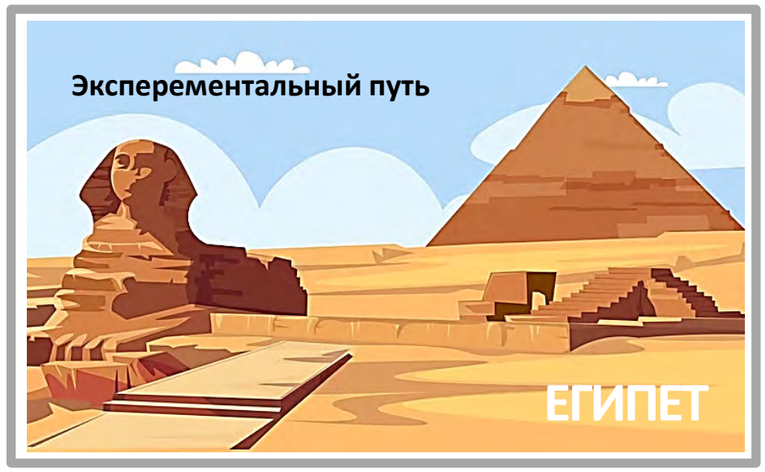
Учитель
- Скажи.

Ученик
- Сумма углов треугольника всегда равна 180 градусам.

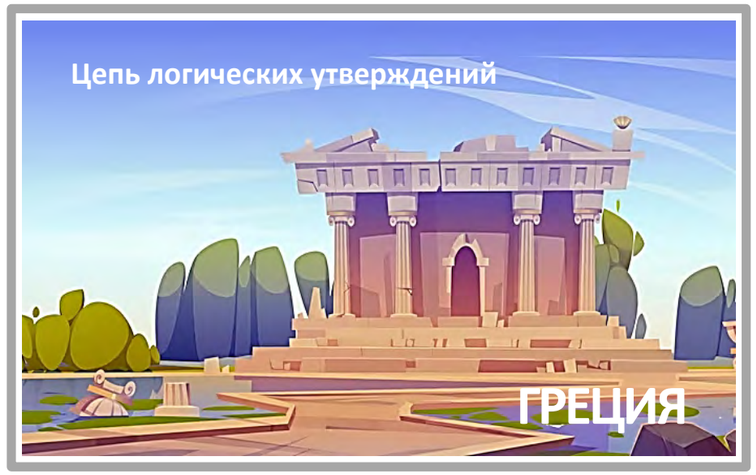
Сумма трех углов треугольника равна 180 градусам

Учитель
- Молодец! Экспериментальным путем ты нашел некий геометрический закон. Так и поступали древние вавилоняне или египтяне.





Учитель
- А вот уже в Древней Греции был открыт другой способ поиска истины – через цепь логических последовательных утверждений, используя уже какие-то хорошо известные правила. Это называлось доказательство теоремы.



Ученик
- То есть, вы хотите сказать, что цепь таких логических последовательных утверждений может привести меня к такому же выводу о сумме углов треугольника?

Учитель
- Совершенно верно.

Ученик
- В это трудно поверить.

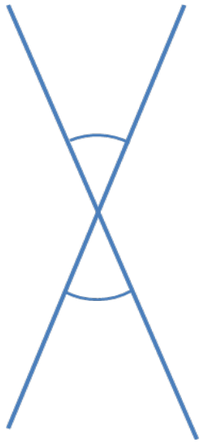
Учитель
- Я тебе сейчас продемонстрирую такое доказательство теоремы. Доказательство всегда напоминает достаточно строгую последовательность действий.

Ученик
- Похоже на рецепт приготовления пирога.

Учитель
- Так и есть. А для любого рецепта нужны продукты. Такими продуктами в нашем случае будут уже известные свойства углов. Нам понадобятся следующие свойства:

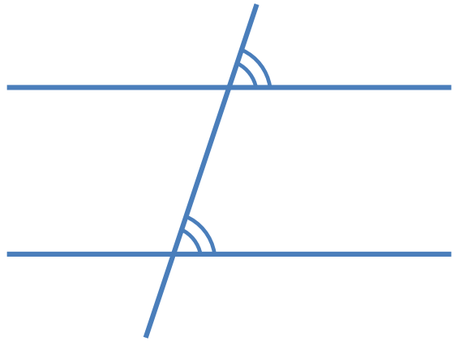
1. Вертикальные углы равны

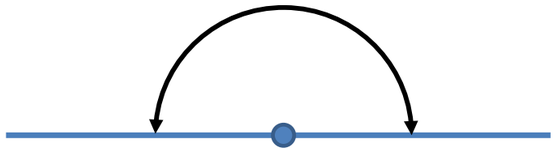
Вертикальные - два угла, которые образуются при пересечении двух прямых.



1. Вертикальные углы равны

2. Углы при пересечении двух параллельных линий секущей равны.





180°

Учитель
- Так и есть.

Ученик
- Кажется, я начинаю улавливать суть доказательства. Нужно просто доказать, что все углы треугольника можно уложить в развернутый угол.

Учитель
- Их может быть несколько. Главное, чтобы в них была «железная» логика, которую трудно разрушить.

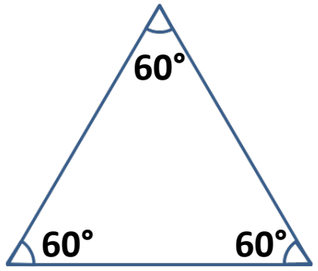
Ученик
- Существует только один способ доказательства или их может быть несколько?

Ученик
- Подведем итог. Сумма трех углов треугольника равна 180 градусам.
К такому выводу можно прийти экспериментальным путем, а можно этот же вывод получить через цепь логических утверждений.

Сумма трех углов треугольника равна 180 градусам

Учитель
- И еще про углы. У равностороннего треугольника все углы равны. Как ты думаешь, чему равен каждый угол такого треугольника?

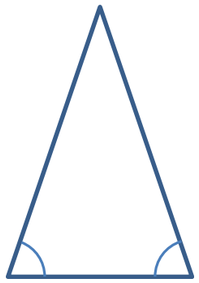
Ученик
- Нужно 180 разделить на три, получится 60.



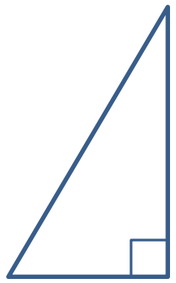
180°/3 = 60°

Учитель
- Молодец, правильно. Еще нужно помнить, что углы при основании у равнобедренного треугольника равны.

Ученик
- И еще про углы и названия. Треугольник, у которого один угол равен 90 градусов называют прямоугольным, треугольник у которого один угол больше 90 градусов называют тупоугольным.

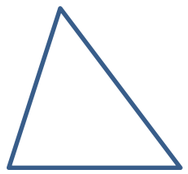


Равнобедренный треугольник



Прямоугольный треугольник

Тупоугольный треугольник



Остроугольный треугольник

ТРЕУГОЛЬНИКИ: ВЫСОТА

Часть 3

ВЫСОТА

Учитель
- Помимо сторон и углов в треугольнике есть еще множество внутренних и внешних элементов, знание о которых помогает в решении многих инженерных задач.

Ученик
- Верчу свой проволочный треугольник в руках, но кроме сторон и углов ничего больше увидеть не могу. О чем вы говорите?

Учитель
- Сейчас речь пойдет о неких незримо присутствующих элементах каждого треугольника.

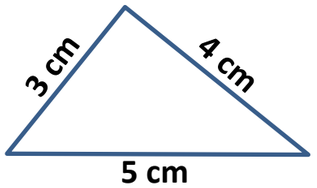
Ученик
- Незримых? Это на фокусы какие-то похоже.

Учитель
- Ты прав, элементы фокуса здесь есть. Математика вообще часто напоминает школу магии и жонглирования цифрами, сторонами, углами, переменными, уравнениями, теоремами и аксиомами.

Ученик
- Вы меня заинтриговали.

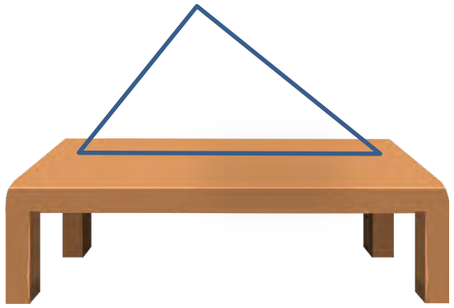
Учитель
- Сейчас речь пойдет о высоте фигуры, в данном случае, о высоте треугольника. Пусть стороны твоего проволочного треугольника равны 3 сантиметра, 4 сантиметра и 5 сантиметров. Поставь свой проволочный треугольник вертикально на самое большое ребро.

Ученик
- У него есть ребра? Может еще и жабры?



Учитель
- Ребрами называют стороны любой геометрической фигуры.

Ученик
- Понятно. Нужно поставить мой проволочный треугольник на самую большую сторону вертикально.



Учитель
- Ты все сделал правильно. А теперь отмерь высоту этого треугольника.

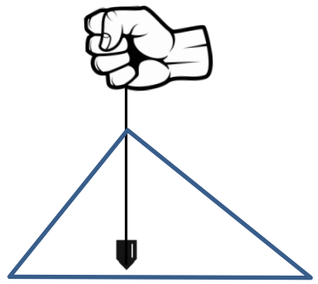
Ученик
- Линейкой?

Учитель
- Да, линейкой.

Ученик
- Самая высокая точка – это угол, который торчит вверх. Буду мерить отрезок между ребром и углом, который торчит над столом.

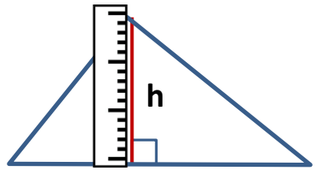
Учитель
- Только мерить нужно так, чтобы расстояние было кратчайшим.

Ученик
- Понятно, чтобы линейка стояла строго вертикально, как отвес.



Учитель
- Да, угол между вершиной треугольника и противоположной стороной должен быть прямым или составлять 90 градусов.

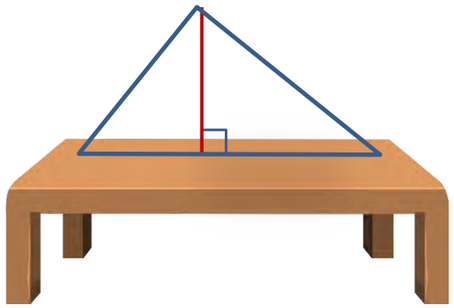
Ученик
- Измерил. Получилось 2 сантиметра и 4 миллиметра. Что дальше?



2,4 cm

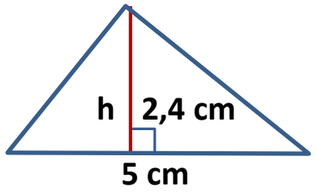
Учитель
- А теперь умножь величину основания на высоту.

Ученик
- Основание – это сторона, которая упирается в стол?



Учитель
- Да. Она у тебя, если ты не забыл, равна пяти сантиметрам.

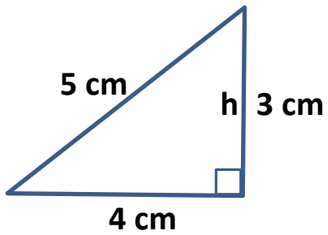
Ученик
- 5 умножить на 2,4 получается 12.



5 · 2,4 = 12

Учитель
- Отлично, а теперь поставь свой треугольник на другое ребро и проделай ту же процедуру.

Ученик
- Поставлю на ребро, длина которого 4 сантиметра. Высота у него совпадает с ребром, у которого три сантиметра. Треугольник-то у меня прямоугольный. Даже линейку подставлять не нужно.



Учитель
- А теперь опять умножь основание на высоту.

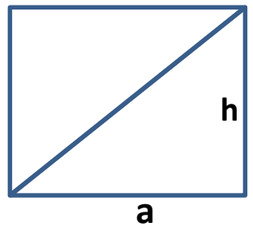
Ученик
- Теперь основание у меня четыре сантиметра, а высота равна трем сантиметрам, умножаю три на четыре, получаю 12. Я понял, если поставлю треугольник на ребро, величина которого три сантиметра, высота будет четыре сантиметра, а их произведение опять 12.

Учитель
- Не всегда получается так легко и красиво, но всегда произведение основания на высоту есть величина особая – она имеет отношение к площади треугольника.

Ученик
- Произведение основания на высоту – это площадь четырехугольника, насколько я помню.

Учитель
- Да, ты помнишь верно, поскольку треугольник – это половина четырехугольника, то его площадь будет равна половине произведения основания на высоту.

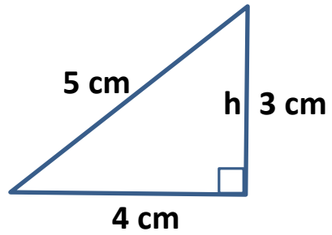
Ученик
- И не важно, какого основания? То есть, какую сторону я буду считать за основание?



S = a · h

Учитель
- Главное, чтобы высота была опущена из вершины, противоположной этому основанию.

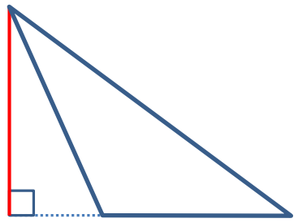
Ученик
Тогда площадь моего треугольника равна половине от двеннадцати, то есть шести.



4 · 3 = 12/2 = 6

Учитель
- Совершенно верно.

Ученик
- А если мой треугольник тупоугольный, то высота его или отвес будет за пределами этого треугольника.



Учитель
- Так и есть. Ты сейчас обратил внимание на одно из главных свойств тупоугольного треугольника.

Ученик
- Величину основания треугольника не нужно будет продлять до пересечения с высотой, чтобы подсчитать площадь?

Учитель
- Нет, основание сохраняет свою величину. Мы же не должны за счет увеличения основания увеличивать площадь треугольника.

Ученик
- Мне кажется, что я понял и про высоту треугольника и про площадь треугольника.

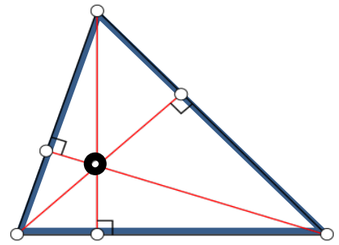
Учитель
- Есть еще важное замечание, ты сейчас работал с очевидной высотой треугольника, она напоминала вертикальный отвес от вершины, противоположной основанию. Но часто на чертежах пользуются некой воображаемой высотой треугольника, как если бы основанием была другая сторона, а к ней опущен перпендикуляр. Если провести высоты к трем сторонам треугольника, они пересекутся в одной точке.

Ученик
- Это еще одна магическая точка?

Учитель
- Да. Именно так. Точка пересечения трех высот треугольника даже свое название имеет.

Ученик
- Высотоцентр?

Ортоцентр

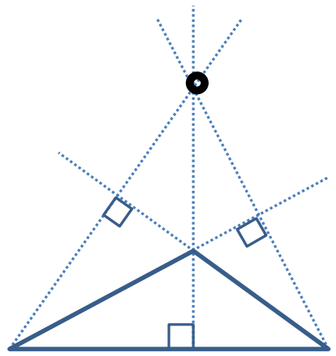


Учитель
- Немного не угадал – ее называют ортоцентр. От древнегреческого слова ортос или прямой.

Ученик
- А если треугольник тупоугольный?

Учитель
- Ничего страшного, просто ортоцентр будет находиться за пределами треугольника, на продолжении его сторон.

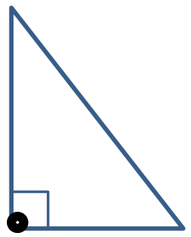
Ортоцентр



Ученик
- А если треугольник прямоугольный?

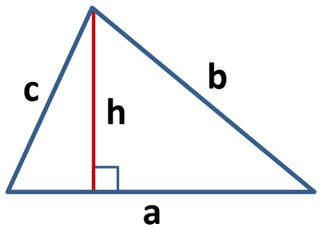
Учитель
- Подумай сам.

Ученик
- Две стороны – это и есть высоты. Тогда Вершина прямого угла – это и есть ортоцентр такого треугольника.



Учитель
- Молодец. Все правильно. Ортоцентр находится внутри остроугольного треугольника, снаружи в тупоугольном треугольнике и совпадает с вершиной прямого угла в прямоугольном треугольнике.

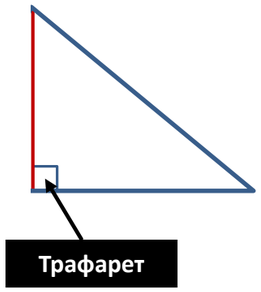
Ученик
- А еще площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.



S = 1/2ha

Учитель
- Вот видишь, как важно знать высоту треугольника и уметь ее правильно провести к любой из сторон.

Ученик
- Здесь важно уметь проводить перпендикуляр из точки до прямой. А в этом помогает трафарет.

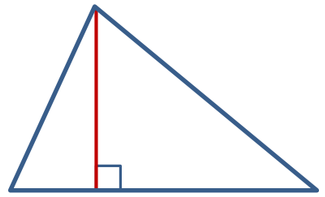


Учитель
- А что является трафаретом для проведения перпендикуляра к прямой?

Ученик
- Прямоугольный треугольник. Но можно и любой прямоугольник. Нам же нужно только, чтобы угол между стороной треугольника и высотой у этой стороне был прямым или равнялся 90 градусам.

Учитель
- А ты заметил, как обозначают прямой угол на чертеже?

Ученик
- Квадратиком.



Учитель
- Скажем так, квадратным углом.

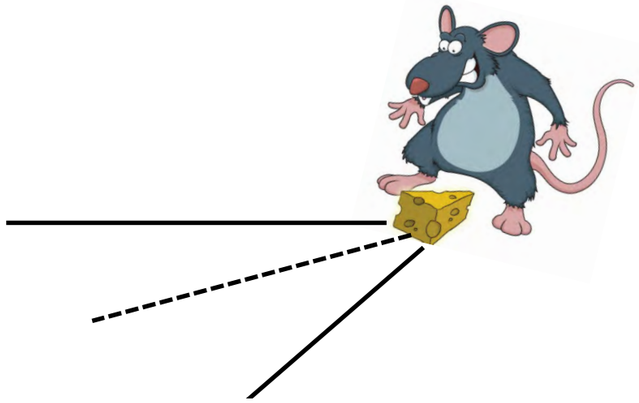
ТРЕУГОЛЬНИКИ: БИССЕКТРИСА

Часть 4

БИССЕКТРИСА

Учитель
- Есть такой стишок: «Биссектриса – это крыса. Она ходит по углам, делит угол пополам».

Ученик
- Какой-то дурацкий стишок.

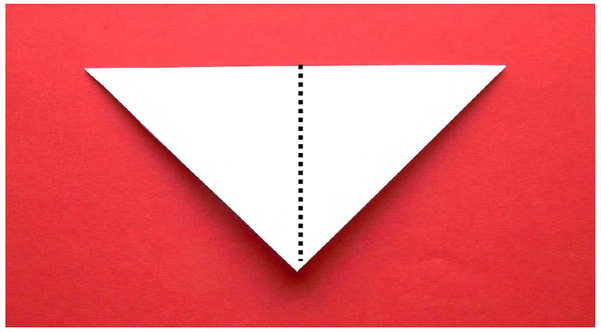


Учитель
- Может и дурацкий, но для запоминания очень помогает.

Ученик
- А что мне здесь нужно запомнить?

Учитель
- Здесь нужно запомнить название еще одного очень важного незримого элемента треугольника.

Ученик
- Биссектриса?

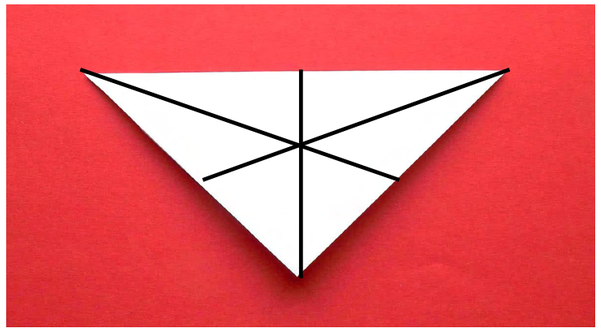


Учитель
- Совершенно верно. А еще что?

Ученик
- Даже не знаю. Какая-то крыса ходит по углам.

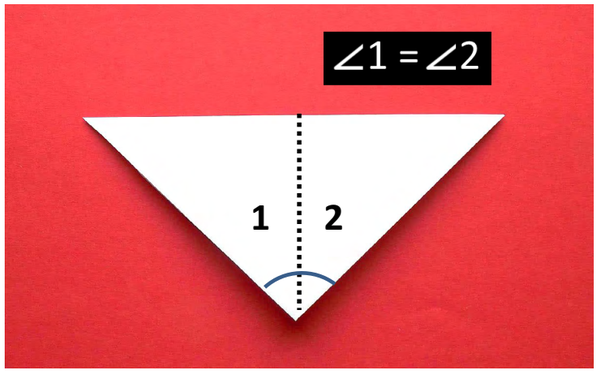
Учитель
- Совершенно верно. Здесь важное слово – углы. А что про них еще сказано?

Ученик
- Крыса их зачем-то делит пополам.



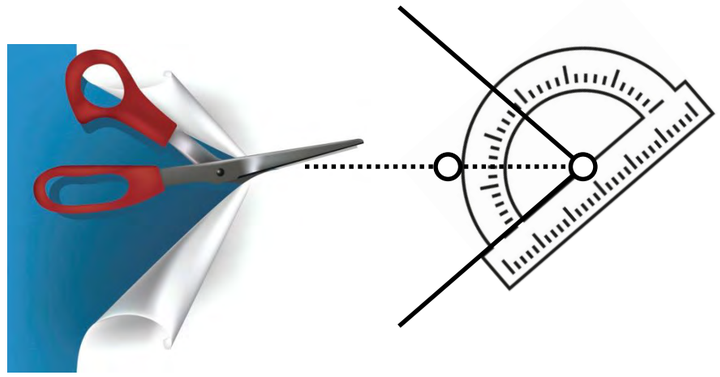
Учитель
- На самом деле не крыса, а биссектриса делит угол пополам. А как его можно разделить пополам?

Ученик
- Можно разрезать, если бы это был бумажный треугольник.



Учитель
- Можно и просто нарисовать линию разреза. А как мы ее проведем?

Ученик
- Нужно взять транспортир, измерить угол, разделить величину угла на два, поставить точку и провести через нее прямую.



Учитель
- Совершенно верно. Но в каждом треугольнике три угла.

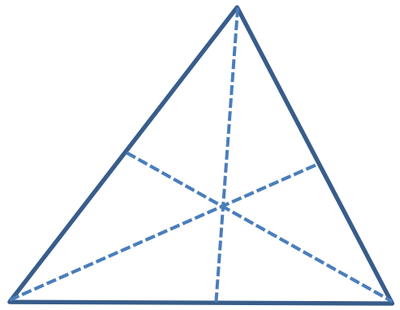
Ученик
- Я понял, значит, крыса бегает по всем трем углам и проводит такие биссектрисы, то есть делит эти углы пополам.

Учитель
- Да. На самом деле, слово биссектриса происходит от латинского словосочетания: би – это два, сектор – переводится как разрезание.

Ученик
- Разрезает на два сектора.

Учитель
- Нарисуй любой треугольник и проведи в нем биссектрисы.

Ученик
- Сделал.

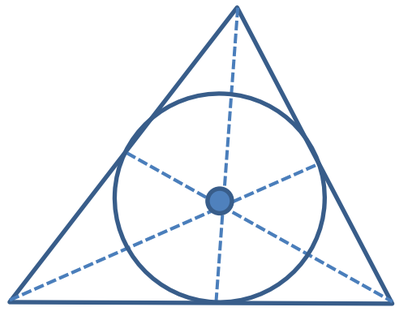


Учитель
- Что скажешь?

Ученик
- Они пересекаются в одной точке. Опять, видимо, какой-то уникальной и замечательной.

Учитель
- Так и есть. Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности.

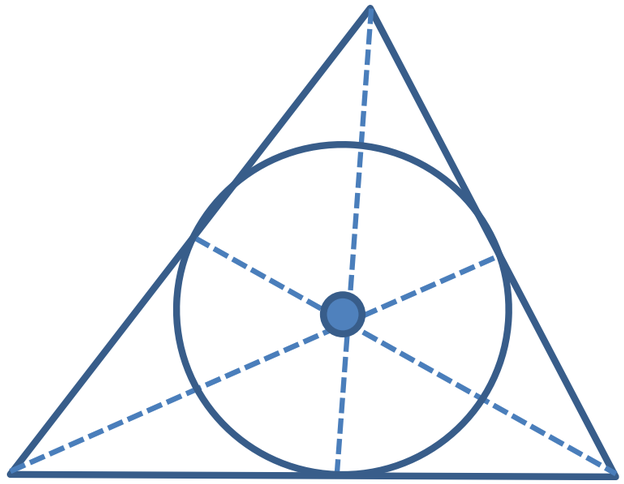
Ученик
- Что значит вписанной окружности?



В любой треугольник можно вписать окружность.
Центр окружности - точка пересечения биссектрис треугольника.

Учитель
- Такая окружность, находясь внутри треугольника, касается его сторон.

Ученик
- Я понял. Элементами треугольника помимо сторон, углов, высот являются также биссектрисы. Они делят углы треугольника пополам и пересекаются в одной точке. Эта точка является центром вписанной окружности.



Учитель
- Да. Все верно. Помимо высот и биссектрис есть еще незримые элементы треугольника, которые называют медианами. О них мы поговорим на следующем уроке.

ТРЕУГОЛЬНИКИ: МЕДИАНА

Часть 5

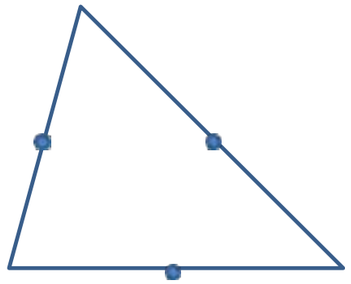
МЕДИАНА

Учитель
- Углы мы уже делили пополам, что еще можно в треугольнике разделить пополам?

Ученик
- Наверное, можно разделить пополам стороны.

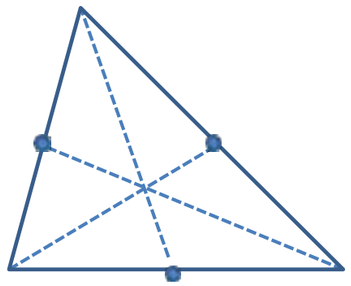
Учитель
- Совершенно верно. Нарисуй треугольник и раздели стороны пополам.

Ученик
- Нарисовал. Разделил стороны пополам. Поставил для ориентира точки.



Учитель
- А теперь соедини эти точки с противолежащими вершинами треугольника.

Ученик
- Соединил. Это и есть медианы треугольника?



Учитель
- Эти отрезки, соединяющие середины сторон с противолежащими вершинами называются медианами. Медиана от латинского слова «средняя».

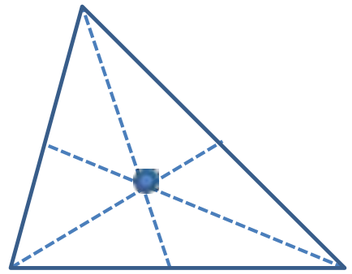
Ученик
- Я подметил одну особенность.

Учитель
- Какую?

Ученик
- Если основание делится на два равных отрезка, а высота остается для этих двух треугольников той же самой, то площади полученных в результате разделения медианой треугольников равны.

Учитель
- Гениально. Ты доказал сейчас теорему о равенстве площадей двух треугольников, полученных в результате проведения медианы. Может ты еще что-то заметил?

Ученик
- Удивительным образом они пересекаются в одной точке. Наверное, эта точка особенная и замечательная, и она имеет какое-то свое название.



Учитель
- Так и есть. Эту точку называют центроидом или центром тяжести треугольника.

Ученик
- Понял. В ней есть какая-то равновесность.

Учитель
- Эта точка делит медианы на два отрезка – больший и меньший. Меньший отрезок в два раза меньше большего.

Ученик
- То есть, величина большего отрезка медианы равна величине двух меньших.

Учитель
- Так и есть, эту особенность медианы можно выразить словами «за одного большего двух меньших дают», а цифрами это отношение можно описать как «два к одному», считая от вершины.

Ученик
- А если треугольник равносторонний? То, наверное, у него вообще все какое-то особое? Самое-самое!

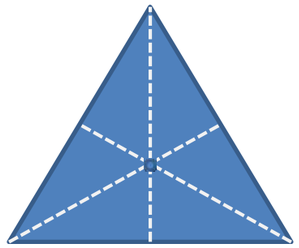
Учитель
- Ты прав. Равносторонний треугольник даже имеет свое название – Правильный треугольник.

Ученик
- Стороны у него равны, углы равны.

Учитель
- Высоты равны, медианы равны, биссектрисы равны.

Ученик
- И все центры совпадают. Какая красота!

Равносторонний треугольник



Учитель
- Это действительно уникальная по гармоничности фигура. Любое правильное лицо, подчиняется законам равностороннего треугольника.

Ученик
- В архитектуре и в интерьере очень часто используют равносторонний треугольник.

Учитель
- Так и есть, но это уже не геометрия, а эстетика – наука о красоте и ее законах.

ТРЕУГОЛЬНИКИ:
СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ

Часть 6

ТРЕУГОЛЬНИКИ: СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ

Учитель
- Геометрия очень напоминает конструктор, в котором отсутствуют некоторые детали.

Ученик
- Поясните на примере.

Учитель
- Тебе нужно создать какую-то модель, а при этом все время чего-то не хватает. То рисунок самой модели отсутствует, и его нужно нарисовать, то какая-то деталь отсутствует. Нужно понять, какая это деталь, как она выглядит, чтобы самому ее достроить.

Ученик
- Тут еще нужно понять, какие детали имеются в наличии. Рассортировать их, чтобы легче собрать модель.

Учитель
- Совершенно верно. И чтобы понять, какие детали есть, а какие отсутствуют, в геометрии пользуются системой обозначений.

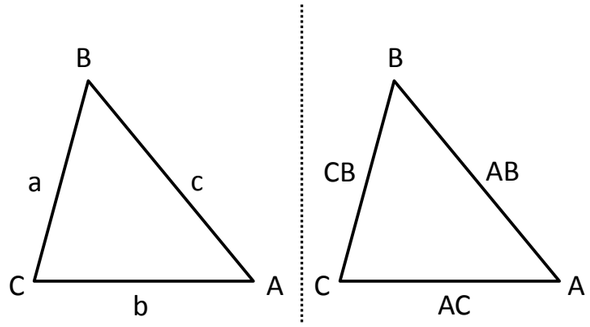
Ученик
- Что-то, типа названий или имен.

Учитель
- Да, что-то типа имен. Проблемы здесь опять могут возникнуть с тем, что одну и ту же деталь могут называть по-разному, нужно это иметь в виду.

Ученик
- У людей это тоже есть. Например, есть полное имя – Василий, есть краткое – Вася, а есть ласкательное – Васенька. А на самом деле, это все один и тот же человек.

Учитель
- Очень хороший пример. Так и в геометрии. Стороны треугольника могут называться просто маленькими буквами латинского алфавита – a, b, c, а могут называться как отрезки, ориентируясь на вершины треугольника AB, CB, AC. Вершины треугольника обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита – A, B, C. Ориентируясь на эти вершины, мы говорим – сторона AB или сторона BC.

Ученик
- А маленькие буквы в названиях сторон и большие в названиях вершин как-то связаны? Или здесь полная свобода?



Учитель
- Нет. Здесь есть договоренность – против вершины «A» всегда лежит сторона «a», и соответственно, против вершины «B», сторона «b» и против вершины «C» сторона «c».

Ученик
- А почему используют буквы латинского алфавита?

Учитель
- Так сложилось исторически. В течение тысячелетий складывался свой математический язык. Самое главное, что язык этот международный. Математический чертеж с соответствующими обозначениями понятен на любом континенте.

Ученик
- **Это хорошо. Очень разумно.**

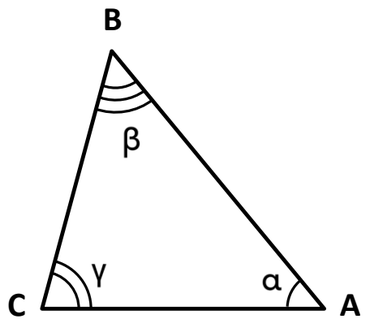
Учитель
- С названиями сторон мы разобрались. Теперь поговорим о названиях углов. Как можно обозначить углы, чтобы было понятно, о каком из них идет речь?

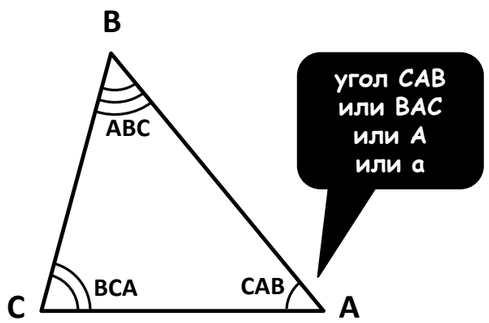
Ученик
- Думаю, что опять какими-нибудь буквами.

Учитель
- Есть такой вариант. Однако так как латинские буквы уже заняты под название сторон, то используют аналогичные греческие буквы. Для треугольника это обычно альфа, бета и гамма (α,β,γ). При этом договорились, что угол альфа будет исходить из вершины A, угол бета из вершины B и угол гамма из вершины C. Сторона a обычно лежит напротив угла A.

Ученик
- Я видел, что угол может обозначаться тремя буквами.

Учитель
- Такое тоже встречается. Вершины треугольника, если их перечислять последовательно образуют соответствующий угол. Например, чтобы найти угол ВСА, смотришь на треугольник и взглядом обводишь последовательно по вершинам – сначала В, потом С, потом А. Получается угол. Слово «угол» заменяется соответствующим значком, внешне напоминающем острый угол, а слово «треугольник» заменяют значком треугольника.





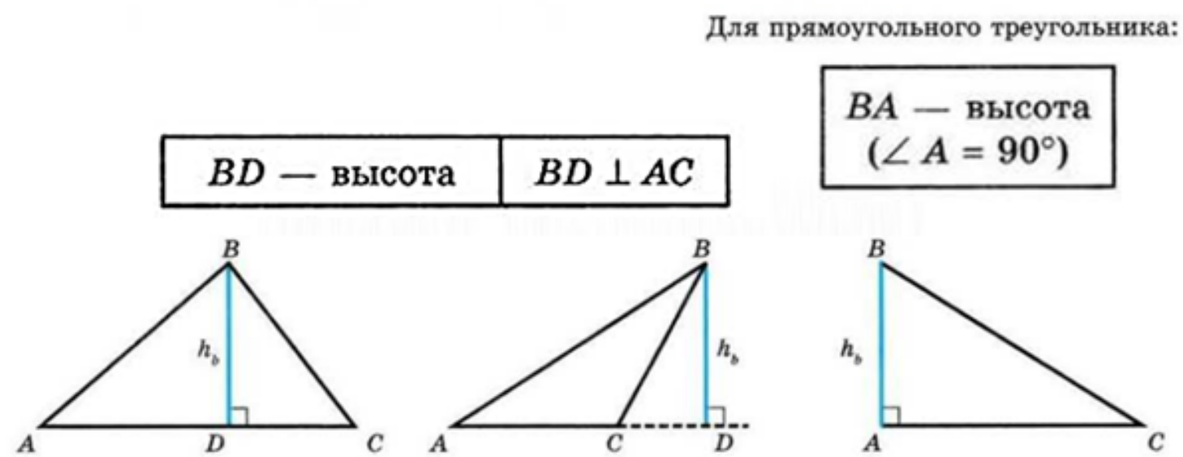
Ученик
- Про вершины, стороны и углы мне понятно, а как обозначают другие элементы треугольника – высоты, биссектрисы, медианы?

Учитель
- Здесь тоже есть варианты. Могут обозначать общепринятыми между математиками обозначениями. Так, для обозначения высоты используют латинскую букву h, для медианы – латинскую букву m, а для биссектрисы используют латинскую букву l.

ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Ученик
- Но ведь высот, а также медиан и биссектрис не одна, а три. Как мы узнаем, какая из трех высот имеется в виду?

Учитель
- Обычно рядом ставится маленькая буква, указывающая на вершину, из которой проведена высота, биссектриса или медиана. Точку пересечения со стороной треугольника обозначают какой-нибудь заглавной латинской буквой. В этом случае, высота может обозначаться как отрезок с определенными вершинами. Слово «перпендикулярно» обозначается вертикальной палочкой, на горизонтальном основании.

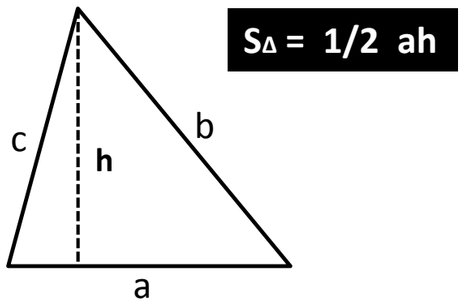


Ученик
- Какие-то пиктограммы, напоминающие древние наскальные надписи.

Учитель
- Так и есть. Нужно просто знать этот пиктографический язык. Рисунок значка очень многое подсказывает.

Ученик
- Я понял, чтобы расшифровать какую-то геометрическую формулу, нужно просто знать этот древний пиктографический математический язык.

Учитель
- Так и есть. Например, написано SΔ=1/2 ah Как это расшифровать на русском языке?



SΔ = 1/2 ah

Ученик
- Буквой S в геометрии обычно обозначают площадь фигуры, слово «треугольник» заменено значком треугольника, 1/2- это половина, a – сторона треугольника, h – это высота. Знак умножить между буквенными обозначениями не ставится, но подразумевается. Читать по-русски нужно так: «Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

Учитель
- Молодец, совершенно верно. Обычно условие задачи или некая инструкция записана математическим языком. Чтобы понять условие, нужно перевести на понятный нам язык. Чертеж, обычно, очень помогает понять условие задачи – какие детали известны, а какие нужно найти.

Ученик
- А искать легче, если ты знаешь, что искать и где оно спрятано, Ориентироваться нужно на некие подсказки в виде известных правил, теорем и аксиом.

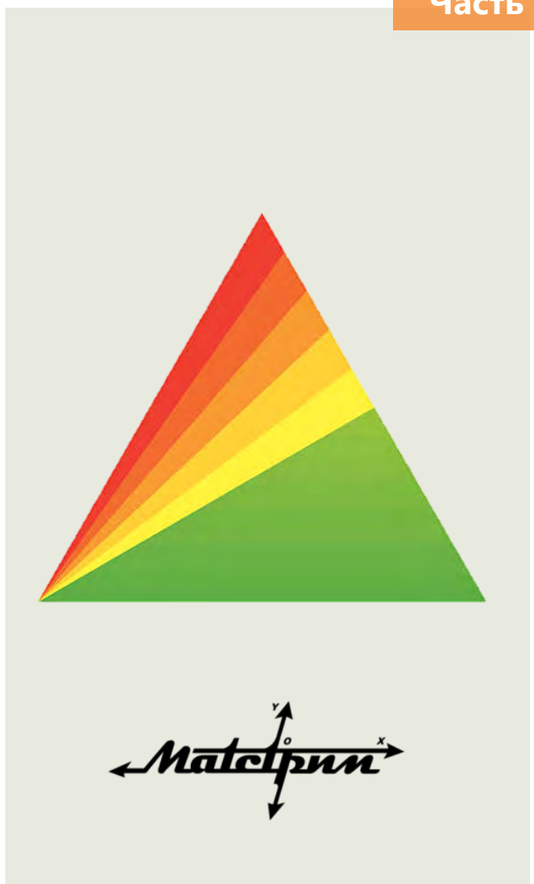
Учитель
- Совершенно верно. И здесь опять необходимо знание этих правил, теорем и аксиом, а также тренировка.

Ученик
- А еще внимательность и аккуратность.

Учитель
- А еще внимательность и аккуратность.

ТРЕУГОЛЬНИКИ: ПОДОБИЕ

Часть 7



ТРЕУГОЛЬНИКИ: ПОДОБИЕ

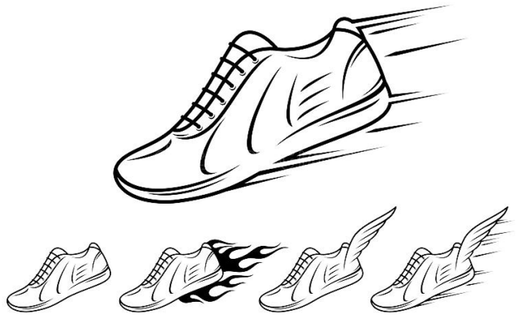
Учитель
- Сегодня мы поговорим на очень важную в человеческой культуре тему – подобии фигур. Когда я употребляю слово «подобный», что для тебя оно означ

Ученик
- На мой взгляд, подобный означает похожий.

Учитель
- Правильно похожий, но не равный. В математике оно означает похожий по форме и равный по всем своим соотношениям частей.

Ученик
- Не совсем понятно, как это «похожий, но не равный», «похожий по форме, но равный по соотношению частей»?

Учитель
- Приведу пример. Ты заходишь в магазин обуви и выбираешь кроссовки. Меряешь пару, но она тебе мала. Спрашиваешь у продавца, нет ли у вас другой такой же, но чуть больше по размеру.



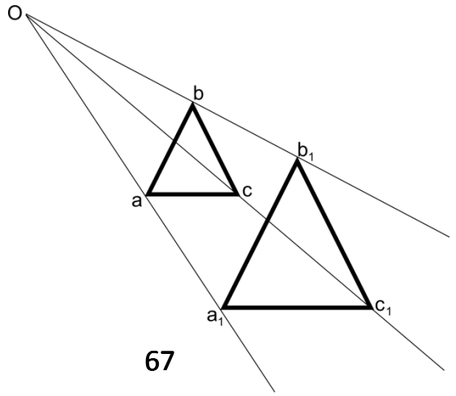
Ученик
- Понял. «Похожие, но не равные», «похожие по форме, но равные по соотношению частей», то есть, в другой паре кроссовок все части будут чуть больше, однако общий вид и форма сохранятся.

Учитель
- Совершенно верно. Приведу еще один пример. На твоем смартфоне ты рассматриваешь какую-то фотографию, хочешь увидеть чуть яснее какие-то детали лица.

Ученик
- Я раздвигаю размер фотографии, получаю «похожее по форме, и равные по соотношению частей».

Учитель
- Да, ты не получаешь другое лицо, с увеличенным носом или глазами, ты увеличиваешь или уменьшаешь все лицо целиком. То есть получаешь подобное изображение.

Ученик
- Я понял, беру свой проволочный треугольник, фотографирую его, а потом могу уменьшать или увеличивать фотографию.

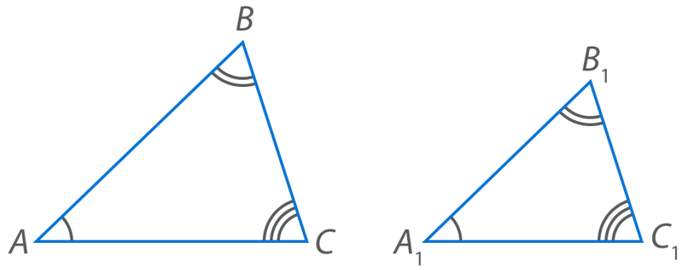


Учитель
- Какие изменения мы будем видеть на этих разных фотографиях?

Ученик
- Размер сторон треугольника увеличивается или уменьшается.

Учитель
- А что остается неизменным?

Ученик
- Размер углов при этом всегда остается неизменным.



Учитель
- Вот ты и вывел главное правило подобных треугольников.

Ученик
- Треугольники, у которых углы равны, называются подобными.

Треугольники, у которых углы равны, называются подобными.

Учитель
- Молодец. Совершенно верно.

Учитель
- Подумай сам.

Ученик
- А для чего нам это подобие нужно?

Ученик
- Например, нам нужно построить уменьшенную копию чего-то, чтобы провести испытания прочности. Строим эту копию, испытываем, вносим коррективы и создаем нужный образец.

Учитель
- Хороший пример. А если у нас есть некоторые части, по которым мы можем понять форму целого предмета, а нам нужно понять, как будет выглядеть весь предмет, увеличенный в несколько раз?

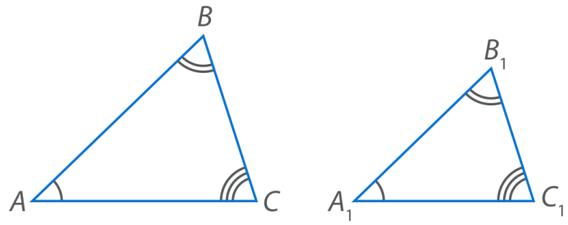
Ученик
- Все стороны увеличатся в несколько раз, а углы при этом сохранятся. Мы можем сразу увеличивать наши размеры сторон в определённое количество раз, сохраняя при этом все углы, а потом уже достраивать до полной формы.

Учитель
- Очень грамотно размышляешь. В геометрии многие задачи пользуются правилами подобия фигур, и конечно очень часто пользуются правилами подобия треугольников.

Ученик
- Главное, чтобы все три угла этих подобных треугольников были равны.

Учитель
- А если есть информация, что два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника?

$\angle A=\angle A_1 \quad \angle B=\angle B_1 \quad \angle C=\angle C_1$

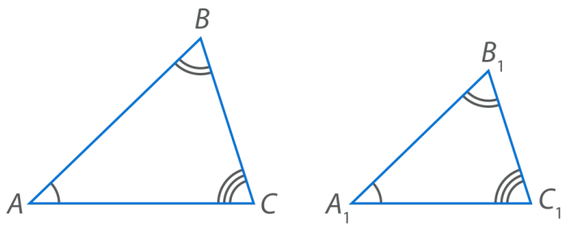


Ученик
- То можно считать, что у нас есть информация о равенстве всех углов двух треугольников.

Учитель
- Это почему?

Ученик
- Сумма углов треугольника всегда равна 180 градусам. Это и позволяет нам сделать вывод о том, что два угла треугольника всегда определяют величину третьего угла. Она равна 180 минус сумма величин двух известных нам углов.

$180° - (\angle A + \angle B) = \angle C$



Ученик
- Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

$(\angle A + \angle B) = (\angle A_1 + \angle B_1)$

Учитель
- Сформулируй правило подобия для треугольников, учитывая твое утверждение.

Ученик
- Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

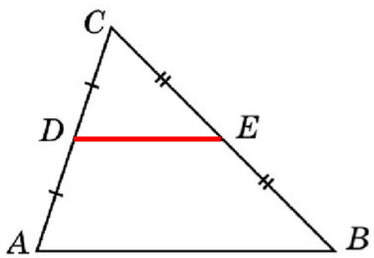
Учитель
- Молодец. А теперь задача.

Ученик
- Слушаю.

Учитель
- У нас есть треугольник ABC. В нем проведена средняя линия DE.

Ученик
- Что такое «средняя линия»?

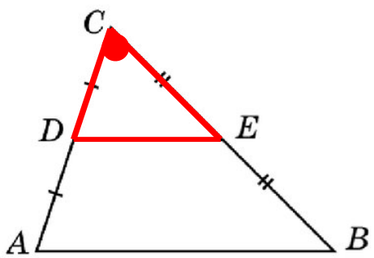
Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.



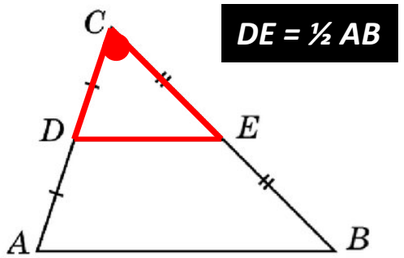
Учитель
- Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Нужно найти, чему равен этот отрезок.

Ученик
- Первое, что бросается в глаза на чертеже, треугольник ABC подобен треугольнику DEC.

Учитель
- Заметил правильно, но это надо еще доказать.



Ученик
- Треугольник всегда полностью определен тремя его элементами, один элемент из которых сторона треугольника. У нас есть угол C – одинаковый для двух треугольников. У нас есть величины сторон, уменьшенные ровно в два раза.

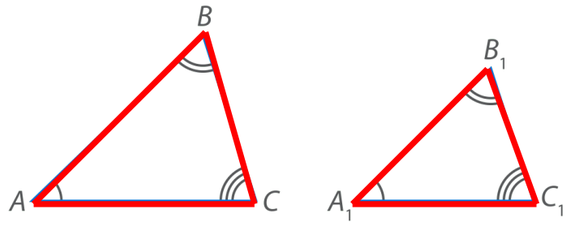


DE = ½ AB

Ученик
- Следовательно, треугольник CDE – уменьшенная в два раза копия треугольника ABC. А значит все его три стороны уменьшены в два раза. То есть, величина средней линии треугольника равна половине его основания, или ½ AB. Можно записать так: DE = ½ AB

Учитель
- Еще можно сказать, что средняя линия треугольника параллельна основанию, это вытекает из свойств углов, параллельных линий и секущих. Вообще любая линия, параллельная стороне треугольника образует подобные треугольники.

Если три стороны одного треугольника параллельны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны



$\angle A=\angle A_1$ $\angle B=\angle B_1$ $\angle C=\angle C_1$

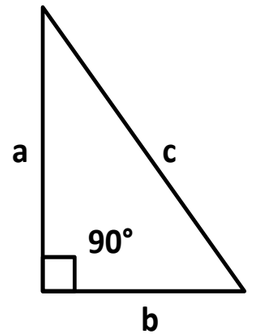
ТРЕУГОЛЬНИКИ:
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Часть 8

ТРЕУГОЛЬНИКИ: ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Учитель
- Сегодняшний урок мы посвятим прямоугольному треугольнику и его возможностям для решения задач с любыми треугольникам

Ученик
- Целый урок одному прямоугольному треугольнику?



Учитель
- Этот вид треугольников по степени своей важности царствует среди других.

Ученик
- Чем же он так важен?

Учитель
- Если ты можешь разделить фигуру на прямоугольные треугольники, то шансы на то, что задача будет решена, у тебя заметно повышаются.

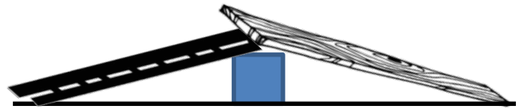
Ученик
- Почему это они у меня повышаются?

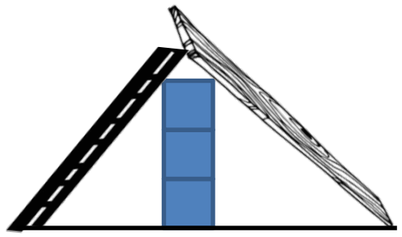
Учитель
- Здесь используется пространственное правило, связанное с высотой треугольника. Чтобы понять его, попробуем поэкспериментировать.

Ученик
- Я готов. Опять нужно вертеть проволочный треугольник?

Учитель
- Нет. Теперь будем работать с дощечками конструктора. Предположим, ты делаешь модель детской горки. Длина спуска тебе известна – это твоя дощечка, а высоту ты должен спланировать сам. Начинай планировать.

Ученик
- Все зависит от того, какая это горка – низкая или высокая. Если низкая, то высота у нее небольшая – я могу найти небольшой кубик и поставить дощечку одним концом на этот кубик, а если горка крутая, то нужно несколько кубиков подставить под эту дощечку.



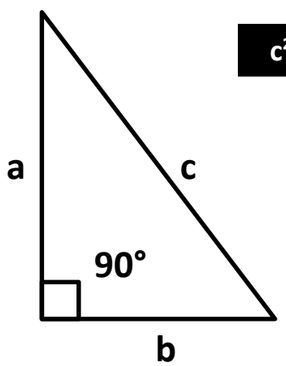


Учитель
- Что значит крутая?

Учитель
- Правильно, то есть, от угла наклона зависит, сколько кубиков ты будешь подкладывать

Учитель
- Еще математики и астрономы Древнего мира заметили одно очень важное свойство сторон этого треугольника, а именно: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$c^2 = a^2 + b^2$



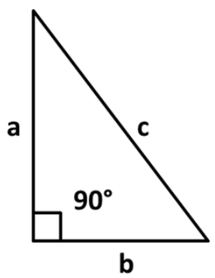
Ученик
- Угол наклона горки будет больше.

Ученик
- Я понял. От угла наклона зависит высота. И конечно же, меньше будет место, занимаемое горкой в основании. Высота зависит от угла наклона. Эти величины связаны между собой.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

$c^2 = a^2 + b^2$



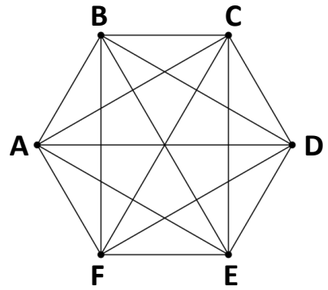
Ученик
- Ну и что в этом свойстве особенного?

Учитель
- У человечества появилась возможность, зная две стороны прямоугольного треугольника, вычислять третью, используя нехитрую формулу.

Ученик
- Если строить горку, крышу или какие-нибудь пирамиды, то эта формула, я думаю, пригодится.

$c^2 = a^2 + b^2$

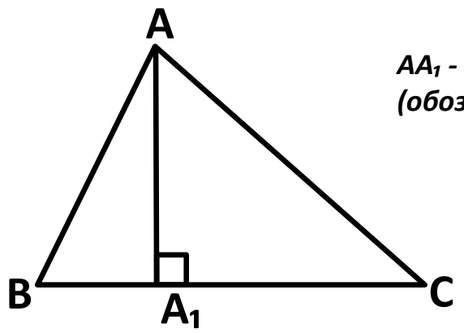
Учитель
- Мы можем любой треугольник или четырехугольник, да и вообще любой многоугольник разбить на множество прямоугольных треугольников.



Ученик
- В любом треугольнике высота разбивает его на два прямоугольных треугольника.

ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащий противоположную сторону, называется высотой треугольника.



AA_1 - высота ΔABC
(обозначение h_1)

Учитель
- Молодец, что ты это заметил.

Учитель
- То…

Учитель
- И она тебя не обманывает.

Учитель
- Самое главное ты уже подметил. Продолжай.

Учитель
- Что понять?

Учитель
- Ты прав. Здесь есть логический скачок из геометрической логики в тригонометрическую логику.

Учитель
- В тригонометрической логике мы рассуждаем в рамках целого и его частей. То есть, у нас всегда в уме гипотенуза как целое и катеты как части гипотенузы.

Учитель
- Да. При этом высота называется синусом противолежащего угла.

Ученик
- А это значит, что если мы знаем высоту, то…

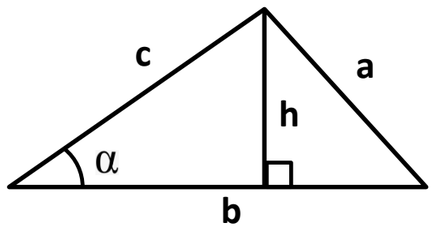
Ученик
- Что-то здесь скрыто очень важное в этой высоте, чувствует моя интуиция.

Ученик
- Попробуем рассуждать. У нас получилось два прямоугольных треугольника.

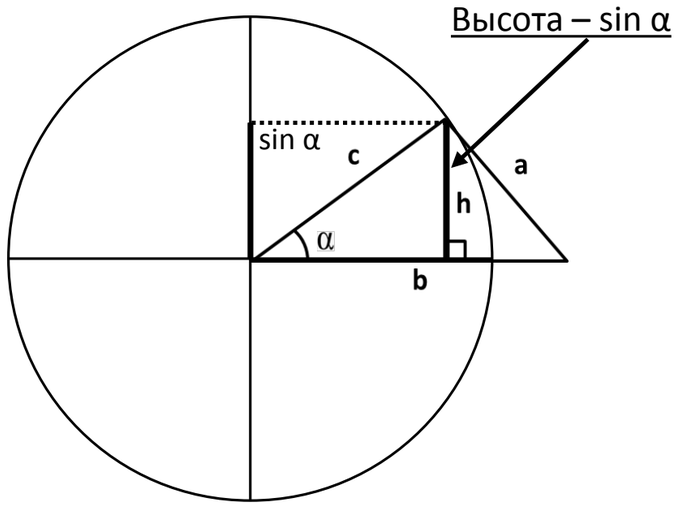
Ученик
- Даже не знаю… Кручу-верчу, понять хочу.

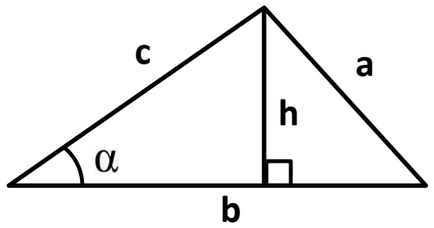
Ученик
- Что от меня требуется. Наверное, какое-то соотношение углов и сторон треугольника. Или высот и сторон?

Ученик
- А что такое особое в этой тригонометрической логике?



Ученик
- Вы хотите сказать, что здесь есть логика дроби или логика отношений целого к его части.





Ученик
- То есть, мы можем взять любую сторону треугольника, и синус противолежащего этой стороне угла и это отношение для данного треугольника будет какой-то неизменной величиной?

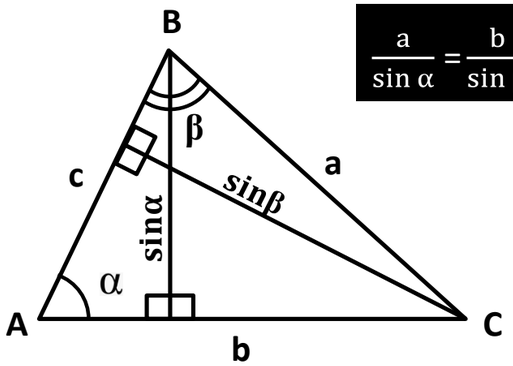
α								
градусов	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
радиан	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin (α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0

Учитель
- Да. Ее еще называют теоремой синусов. А звучит она так: Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Ученик
- Понял: пропорция всегда будет одна и та же, то есть, отношение стороны «а» к синусу угла альфа, будет равно отношению стороны «бэ» к синусу угла бэта, и также будет равно отношению стороны «цэ» с синусу угла гамма.

Ученик
- Давайте подытожим. Для чего нам нужно знать теорему синусов?

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

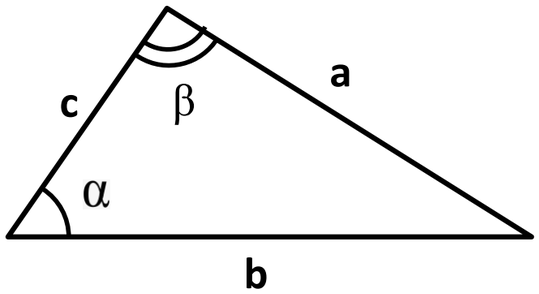
Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Учитель
- Теорема синусов используется для вычисления неизвестных сторон любого треугольника, если даны два угла и одна сторона.

Ученик
- Или даны две стороны и один угол. Только нужно знать еще таблицу синусов для любых углов. Приведите пример.

Учитель
- Задача.
Нам даны стороны треугольника a=5 см и b=7 см, угол α=30 градусов. Нужно узнать, чему равен угол β.



Используя теорему синусов, пропорция будет такая:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Тогда

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

подставляем известные нам цифры

$$\sin\beta = \frac{7\ \sin 30}{5}$$

смотрим в таблицу синусов

$$\sin 30 = ½$$

подставляем это значение в формулу

$$\sin\beta = \frac{7\ 1/2}{5} = 0{,}7$$

Учитель
- Теперь нам нужен калькулятор, чтобы посмотреть, синус какого угла имеет значение 0,7, так как в нашей табличке его нет. То есть, нам нужен арксинус 0,7.

Калькулятор нам показывает, что arcsin 0,7 ≈ 44 градуса. То есть угол β ≈ 44 градуса.

Учитель
- Я же говорил – магия прямоугольного треугольника позволяет совершать математические чудеса!

Ученик
- Так прямоугольный треугольник и тригонометрические таблицы помогли нам в решении задач про стороны и углы любого треугольника.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ВИДЫ И СВОЙСТВА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Часть 1

ВИДЫ И СВОЙСТВА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Учитель
- Что ты можешь сказать о четырехугольниках?

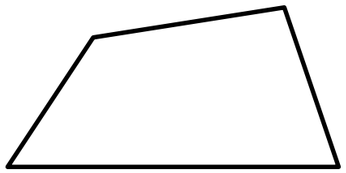
Ученик
- Судя по называнию, это геометрическая фигура, у которой четыре угла.

Учитель
- Совершенно верно. А чему равна сумма этих углов?

Ученик
- Сумма трех углов треугольника, как мы уже выяснили, равна 180-ти градусам.

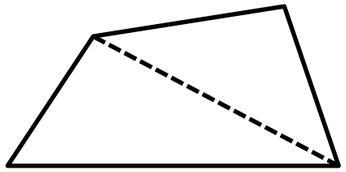
Учитель
- Начало рассуждений совершенно верное. Продолжай.

Ученик
- Рисую произвольную фигуру, у которой четыре вершины, то есть четыре точки, соединенные отрезками в замкнутую форму.



Учитель
- Вспоминай! Любой многоугольник можно разделить на треугольники.

Ученик
- Одним отрезком я разделяю четырехугольник на два треугольника. А теперь считаю сумму всех углов этих треугольников 180 + 180 = 360.

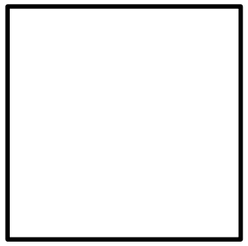


Учитель
- Вот мы и получили основное свойство четырехугольников. Сформулируй его в виде правила

Ученик
- Сумма всех углов четырехугольника всегда равна 360 градусов.

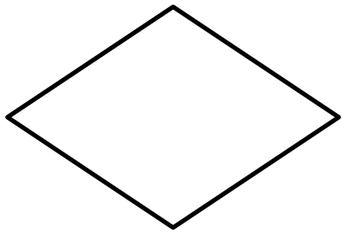
Учитель
- Молодец. А теперь поговорим о сторонах треугольника. Какие возможны варианты?

Ученик
- Все стороны равны. Тогда у нас получается квадрат.



Учитель
- Так. Есть одно название четырехугольника. Только у квадрата еще и углы равны, и все они прямые, а если стороны равны, но углы не равны?

Ученик
- Тогда получается ромб. Но противоположные углы у него равны между собой.

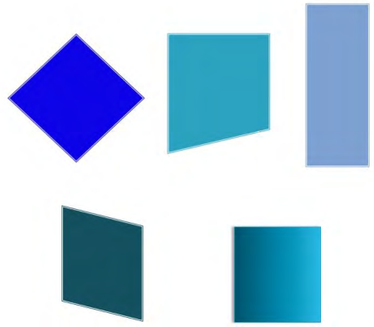


Учитель
- Правильно отметил. У ромба стороны равны и противоположные углы равны. А если противоположные стороны равны и все углы равны?

Ученик
- Тогда это прямоугольник. И название происходит от величины и формы этих углов – они равны девяноста градусам, то есть, они прямые.

Учитель
- Но может быть вариант, что противоположные углы равны и противоположные стороны равны. Тогда эта фигура называется параллелограмм.

Ученик
- Итак, подведем итог. Четырехугольники бывают разные: четырехугольник разносторонний, прямоугольник, квадрат, параллелограмм, ромб.



Учитель
- Есть еще один часто встречающийся вариант четырехугольника – он называется трапеция.

Ученик
- Знаю такой гимнастический снаряд.

Учитель
- К сожалению, к гимнастическому снаряду это отношения не имеет. Название «трапеция» в переводе с древнегреческого означает «столик». У этого столика одно основание лежит на полу, а собственно сама столешница параллельна этому основанию и не равна ему.

Ученик
- То есть, две противоположные стороны у этого столика параллельны, но не равны.

Учитель
- Да это основное свойство трапеции. Параллельные стороны трапеции договорились называть основаниями.

Ученик
- А боковые стороны этого столика? Что о них можно сказать?

Учитель
- Они могут быть равны между собой, такую трапецию называют равнобедренной. Но стороны могут и различаться между собой.

Ученик
- А какие еще четырехугольники бывают?

Учитель
- До сих пор мы говорили о вариантах выпуклого четырехугольника, но бывают еще вогнутые четырехугольники.

Ученик
- У него одна вершина как бы вдавлена внутрь.

Учитель
- Совершенно верно. Кроме того, нужно помнить, что не существует четырёхугольников, у которых все углы острые или все углы тупые.

Ученик
- Это понятно. Иначе не будет выполняться правило о сумме всех углов четырехугольника, которая равна 360 градусов.

Сумма всех углов четырехугольника равна 360 градусов

Учитель
- И еще, одно правило - каждый угол четырёхугольника всегда меньше суммы трёх остальных углов.

Каждый угол четырёхугольника всегда меньше суммы трёх остальных углов

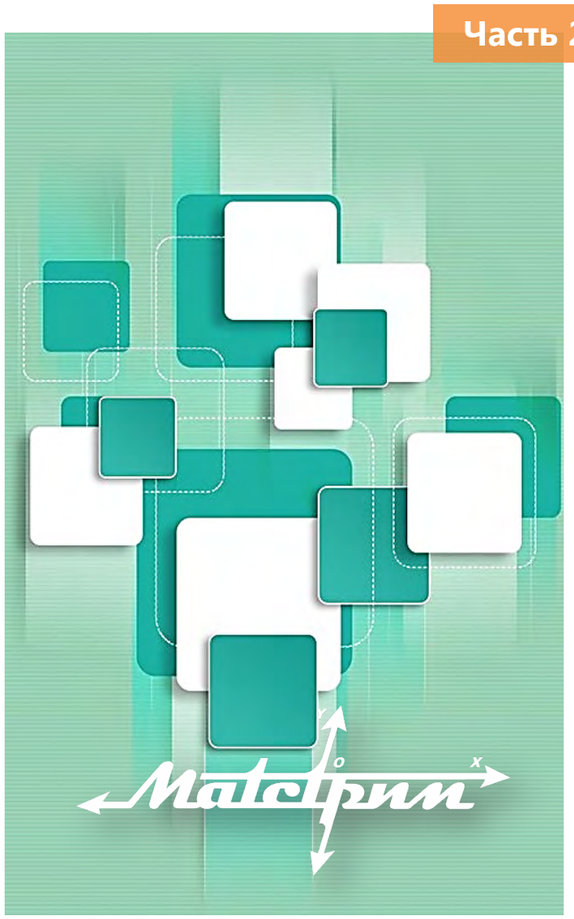
Ученик
- Буду знать.

Учитель
- Это же относится и к сторонам четырехугольника. Каждая сторона четырёхугольника всегда меньше суммы трёх остальных сторон.

Каждая сторона четырёхугольника всегда меньше суммы трёх остальных сторон

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ
ПЕРИМЕТР И ПЛОЩАДЬ

Часть 2

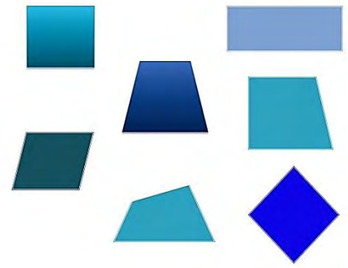


ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ: ПЕРИМЕТР И ПЛОЩАДЬ

Учитель
- Сегодня мы будем проходить тему – периметр и площадь четырехугольников.

Ученик
- Периметр многоугольника – это сумма всех его сторон, следовательно, периметр четырехугольника – это сумма всех его четырех сторон.

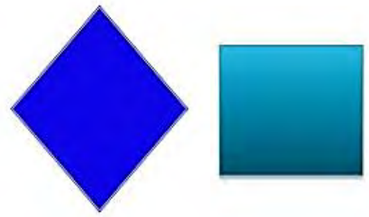
Периметр четырехугольника – это сумма четырех его сторон



P = a + b + c + d

Учитель
- Молодец! А что ты скажешь о периметре квадрата?

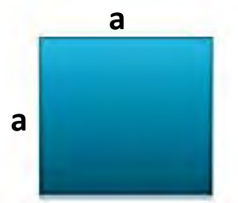
Ученик
- Так как у квадрата и ромба все четыре стороны одинаковые, то мы можем использовать операцию умножения.



P = 4a

Учитель
- Все правильно. А теперь, поговорим о площади четырехугольников.

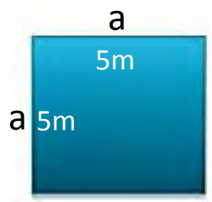
Ученик
- Площадь квадрата мне понятна. Она равна квадрату стороны или величине стороны, умноженной на саму себя.



$S = a \cdot a$

Учитель
- Приведи пример.

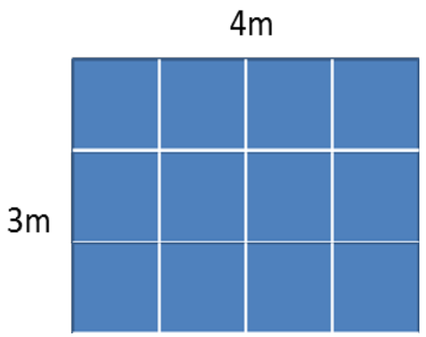
Ученик
- Например, сторона квадрата равна пяти метрам. Тогда площадь такого квадрата равна – пять ю пять – двадцать пять.



$S = a^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Учитель
- Да. Так и есть. А если это не квадрат, а прямоугольник?

Ученик
- Давайте рассуждать на конкретном примере. Предположим, мне нужно положить плитку на пол. Величина сторон прямоугольной комнаты 4 метра в длину и 3 метра в ширину. Предположим, у меня есть квадратная плитка, у которой стороны равны одному метру.



Учитель
- Плитку, с такими размерами сторон ты не найдешь в магазине. Но это не важно. Она все равно продается в пачках по стоимости одного квадратного метра. Поэтому, твоя логика совершенно верна.

Ученик
- Итак. Я выкладываю четыре квадратных метра на всю длину комнаты, но, поскольку ширина комнаты 3 метра, то таких рядов мне нужно три. То есть, площадь прямоугольника будет равна произведению **3 на 4 или 12 метров.**

Учитель
- Отлично. А если говорить не о конкретном прямоугольнике, а о площади любого прямоугольника? Как ты будешь ее вычислять?

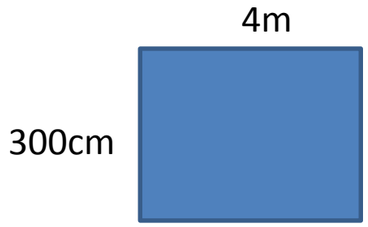
Ученик
- Я буду умножать длину на ширину.

Учитель
- Только следи, чтобы обе величины были в одинаковых условных единицах.

Ученик
- Что вы имеете в виду?

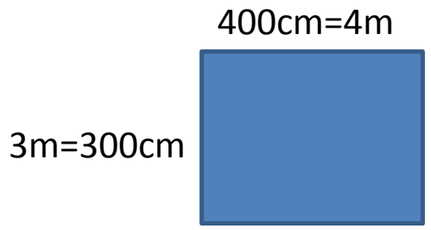
Учитель
- Подумай, если размеры твоей комнаты будут в разных условных единицах, например, длина 4 метра, а ширина 300 сантиметров?

Ученик
- Тогда, если я просто умножу 4 на 300, у меня получится 1200. Только не понятно чего, метров квадратных или сантиметров квадратных.



Учитель
- Вот именно. Чепуха какая-то получится! Поэтому, нужно всегда помнить о том, чтобы все стороны измерялись в одних условных единицах. Иногда для этого, нужно сделать операцию перевода из одних условных единиц в другие. Например, сантиметров в метры

Ученик
- Понял. Постараюсь быть внимательным и аккуратным.



Учитель
- А теперь попробуем вычислить площадь параллелограмма.

Учитель
- Совершенно верно. Рисуем параллелограмм. Можно ли его одним разрезом и одним перекладыванием какой-то части превратить в прямоугольник? Это творческая задача. Подумай!

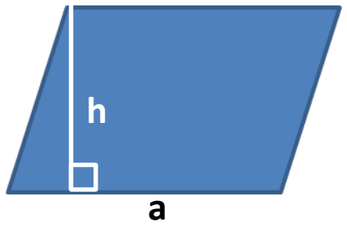
Учитель
- Молодец. А теперь, зная, как вычислять площадь прямоугольника, расскажи, как вычислить площадь параллелограмма.

Ученик
- У этой фигуры противоположные стороны параллельны.

Ученик
- Можно провести высоту из одного тупого угла. Она разделит параллелограмм на две части. Эту вторую часть я переложу вперед так, что у меня получится прямоугольник.

Ученик
- Высота параллелограмм – это сторона нашего получившегося прямоугольника. Значит, чтобы найти площадь прямоугольника, нужно просто умножить сторону (или основание) на высоту.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту



$S = a \cdot h$

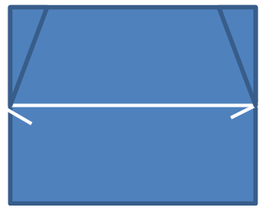
Учитель
- Совершенно верно. И остается нам понять, как вычислять площадь трапеции. Теперь творческая задача будет еще сложнее. Как двумя разрезами и двумя перемещениями полученных после разрезания фигур создать из трапеции прямоугольник.

Ученик
- Даже не знаю. Очень сложная задача. Может, какую-то подсказку дадите?

Учитель
- Дам точки, на которые нужно ориентироваться при разрезе трапеции. Раздели боковые стороны ровно пополам и отметь их точками.

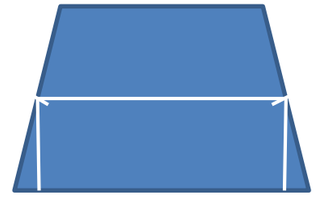
Учитель
- Молодец! Теперь нужно понять, чему равна площадь получившегося прямоугольника.

Учитель
- Я тебе подскажу, сторона полученного прямоугольника будет равняться сумме оснований (нижнего и верхнего) трапеции деленных на два.



Учитель
- Молодец! Так и есть. Теперь, все, что мы с тобой выяснили по поводу вычисления площадей четырехугольников нужно формализовать.

Ученик
- Разделил. Понял!!! Проведу из них высоты к основанию.
Получившиеся маленькие треугольнички использую для достраивания прямоугольника.



Ученик
- Это трудно. Стороны-то мы обрезали. Одно ясно – высота этого полученного прямоугольника и высота трапеции останется той же самой.

Ученик
- Тогда площадь трапеции будет вычисляться по формуле: сумму оснований нужно разделить на два и полученное число умножить на высоту.

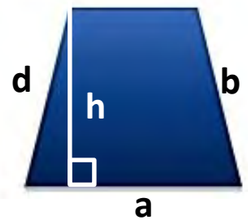
Формула площади трапеции

$S = \frac{a+b}{2} h$

Ученик
- Это что еще за слово такое – «формализовать»?

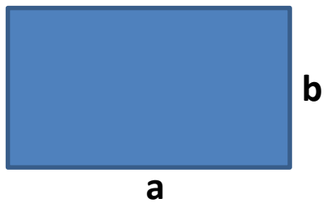
Учитель
- Записать математическим языком или привести к стандартной математической форме.

Ученик
- Площадь обычно обозначается латинской буквой S. Стороны обозначаются строчными буквами латинского алфавита – a, b, c, d и так далее, а высота обозначается буквой h.



Учитель
- Предположим, стороны нашего прямоугольника обозначаются буквами a и b.

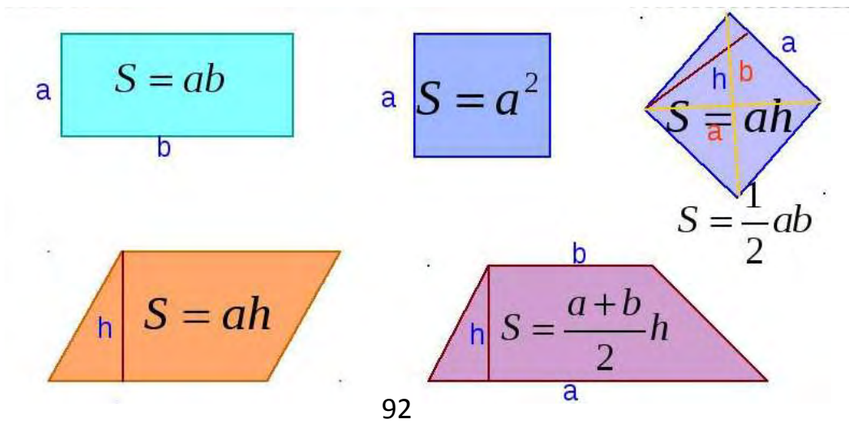
Ученик
- Тогда мы имеем ряд формул для площадей четырехугольников.



$$S = a \cdot b$$

Учитель
- Видишь, какая краткая и красивая запись получилась. Эти формулы должен знать каждый ученик. Они ему очень пригодятся не только на экзамене, но и в жизни!

Формулы площадей четырехугольников



ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

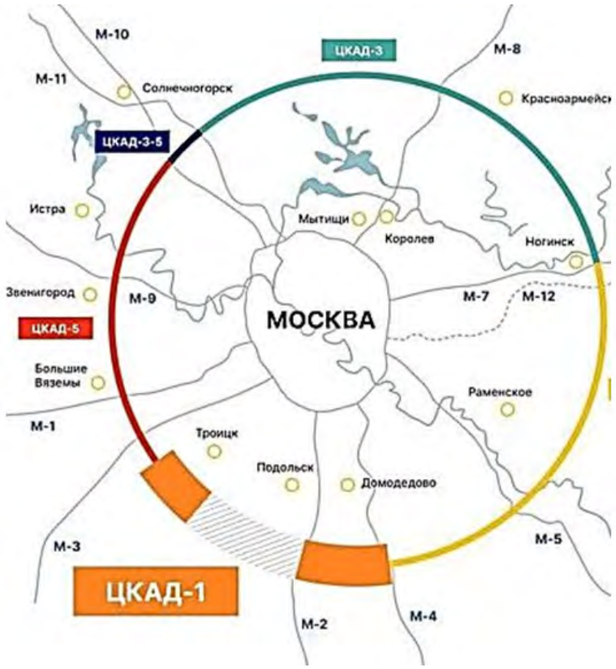
ЭЛЕМЕНТЫ ОКРУЖНОСТИ И КРУГА

Часть 1

ЭЛЕМЕНТЫ ОКРУЖНОСТИ И КРУГА

Учитель
- Сегодня мы будем проходить элементы окружности и круга. Для начала разберемся с терминами, что называют кругом, а что называют окружностью.

Учитель
- Круглым называют и шар. Слово «круглый» несет геометрическую многозначность. Чтобы избежать этой многозначности, математики решили, что круг – это геометрическая фигура на плоскости. И окружность – это геометрическая фигура на плоскости. Но чем же они отличаются?



Учитель
- Правильно мыслишь. Это называется – мыслить по аналогии.

Ученик
- Круг он и есть круг, от слова круглый.

Ученик
- Представляется окружная дорога. Кольцо. Окружная и кольцевая – это линия вокруг какой-то местности.

Ученик
- Тогда, окружность – это линия по краю. Скорее всего, это линия по краю круга.

Учитель
- А круг тогда что?

Ученик
- Круг, тогда, некое пространство внутри этой окружности.

Учитель
- В геометрии мыслят расстояниями и направлениями от какой-то точки.

Ученик
- Для круга и окружности главная точка – центр. Чтобы нарисовать окружность, я ставлю циркуль острым концом в центр, а грифельным концом провожу линию.

Учитель
- Правильно. Ты сейчас описал действия, которые нужно произвести, чтобы нарисовать на листе круг. Подумай, для чего придуман циркуль?

Ученик
- Чтобы рисовать окружность и круг.

Учитель
- Что позволяет циркулю рисовать окружность?

Ученик
- У циркуля два конца. Они разные. Один конец должен быть плотно фиксирован с центром, а другой должен чертить линию при повороте циркуля. Расстояние между этими двумя концами мы можем установить сами – оно может быть больше или меньше, но когда чертим, оно всегда остается одинаковым.

Учитель
- Вот ты и подошел к нашему геометрическому определению окружности – это все точки на плоскости, равноудаленные от центра.

Ученик
- Понял. Красиво сформулировали.

Учитель
- А теперь, ориентируясь на логику определения окружности, дай определение круга.

Ученик
- Круг – это геометрическая фигура на плоскости, ограниченная окружностью.

Учитель
- Можно и так сказать, но стандартное определение дают через все множество точек и расстояние этих точек до центра.

Ученик
- Круг – это множество точек на плоскости, расстояние от центра которых не превышает определенной заданной величины.

Учитель
- Только для этой величины придумали название – радиус круга или окружности.

Ученик
- Расстояние от центра круга до окружности называют радиусом круга и радиусом окружности.

Учитель
- Совершенно верно. Итак, мы уже знаем, что в геометрии называют окружностью, кругом, центром и радиусом окружности или круга. Однако, это не все. Есть еще элементы этих фигур, которые имеют свои названия и свойства.

Ученик
- Что вы имеете в виду?

Учитель
- Представь, что ты режешь пиццу или торт на кусочки. Обычно, ориентируешься на центр.

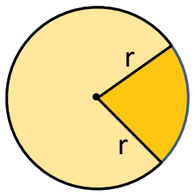
Ученик
- Представил. Себе, конечно, кусок побольше.

Учитель
- Мысленно вырежи себе кусок, который ты бы отрезал себе.

Ученик
- Мысленно вырезал.

Учитель
- Ты разбил круг на два сектора.

Ученик
- Понял. В цирке, в зрительном зале есть тоже сектора – сектор А, сектор Б и так далее.



Учитель
- Дай определение сектору круга.

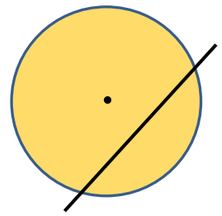
Ученик
- Сектором круга называется фигура, ограниченная двумя различными радиусами.

Учитель
- Молодец. Но есть еще один вариант деления круга одной прямой на две части.

Ученик
- Просто рубануть ножом в любом месте?

Учитель
- Совершенно верно. У такой линии тоже есть свое название.

Ученик
- Разрубающая линия?



Учитель
- Скорее, рассекающая, а точнее – секущая.

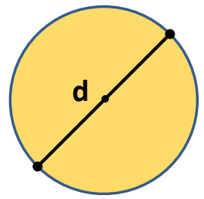
Ученик
- Понял. Это название я должен запомнить?

Учитель
- Да. А отрезок этой секущей, который принадлежит кругу, называется хордой. Хорда в переводе с греческого – струна.

Ученик
- Хордами называют также дороги, которые соединяют окружную или кольцевую.

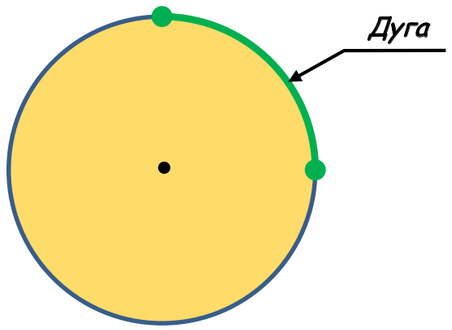
Учитель
- Совершенно верно. Хорда разбивает круг на два сегмента. А если хорда проходит через центр окружности, то такую хорду называют диаметром окружности или круга.

Ученик
- Да, слышал такое слово.



Учитель
- Линию на окружности между двумя точками этой окружности называют дугой окружности.

Ученик
- Это, наконец, все, что нужно мне знать об элементах круга и окружности?



Учитель
- Осталась одна очень важная точка.

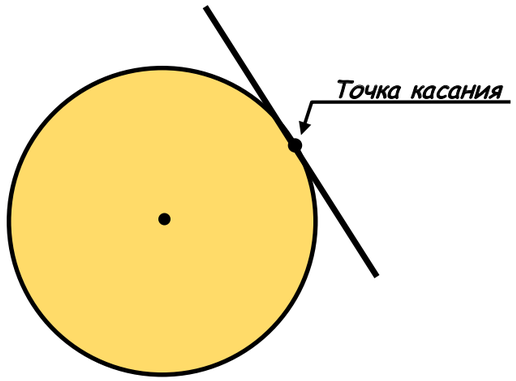
Ученик
- Какая еще точка? Болевая?

Учитель
- Можно сказать и так. Ее называют точкой касания.

Ученик
- Кто же прикасается к этой окружности?

Учитель
- Точнее спросить, что же прикасается к этой окружности? Чаще всего, это прямая или отрезок прямой. Касаться эта прямая может только в одной точке.

Ученик
- Понял. Эту точку и называют точкой касания.



Учитель
- Совершенно верно. А саму прямую называют касательной.

Ученик
- Сколько же этих названий! Я уже устал запоминать.

Учитель
- Все основные, которые тебе нужно знать, мы уже сегодня прошли. Сейчас еще раз повторим для закрепления.

ЦЕНТР – точка, являющаяся центром круга или окружности.

РАДИУС – это отрезок, соединяющий центр круга и любую точку окружности.

ХОРДА – отрезок, соединяющий любые две точки окружности.

ДИАМЕТР – это хорда, проходящая через центр круга.

ДУГА – часть окружности.

СЕКУЩАЯ – прямая, проходящая через две точки окружности.

ТОЧКА КАСАНИЯ – точка соприкосновения прямой и окружности.

КАСАТЕЛЬНАЯ – прямая, проходящая через одну точку окружности..

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

УГЛЫ И ИХ ДУГИ

Часть 2

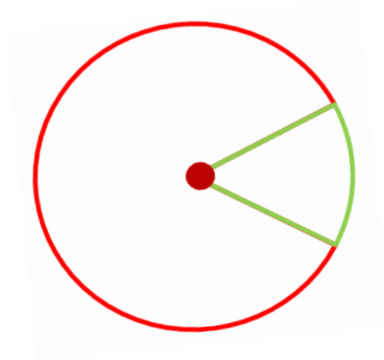
УГЛЫ И ИХ ДУГИ

Учитель
- Важнейшая часть геометрии - учение об углах окружности и круга и дугах, на которые эти углы опираются.

Ученик
- Опираются это как?

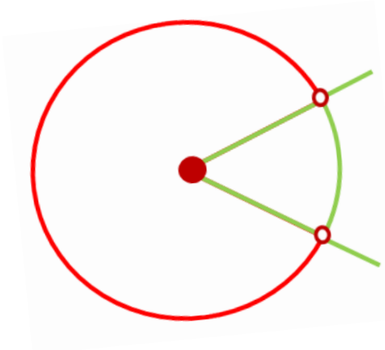
Учитель
- Нарисуй любой круг, а внутри круга нарисуй сектор. Что ты можешь сказать о лучах этого угла?

Ученик
- Лучи этого угла пересекают линию окружности в двух точках. Эти две точки разделяют окружность на два участка или, правильнее сказать, на две дуги.



Учитель
- А если бы тебя попросили придумать название для этого угла?

Ученик
- Угол имеет точку в центре круга и окружности. Это - главное свойство такого угла. Думаю, что правильно было бы назвать его центральным.



Учитель
- Так его и назвали. Угол с вершиной в центре окружности, называют центральным.

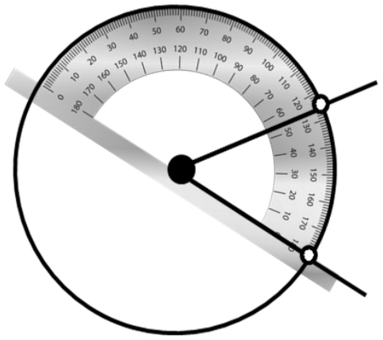
Ученик
- Какой же я умный! Какой же я молодец!

Учитель
- Как ты уже знаешь, угол измеряют в градусах. Вспомни, на сколько градусов разделен круг или окружность?

Ученик
- На 360 градусов. Это каждый знает.

Учитель
- Как измерить величину центрального угла?

Ученик
- Нужно взять транспортир, приложить определенной меткой к центру круга, совместить его с лучом, и направление второго луча совпадет с градусной мерой измеряемого нами угла.

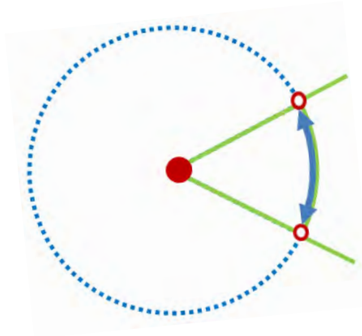


Учитель
- Совершенно верно. А что ты можешь сказать про дугу, которую ограничивает этот угол?

Учитель
- Мыслишь совершенно верно.

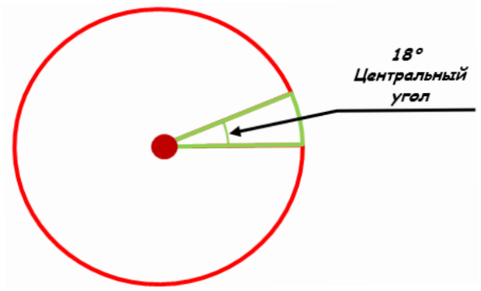
Ученик
- По логике, всю окружность также можно разделить на 360 частей, соответствующих одному градусу.

Ученик
- Тогда сколько градусов наш центральный угол, столько этих частей дуги и будет.



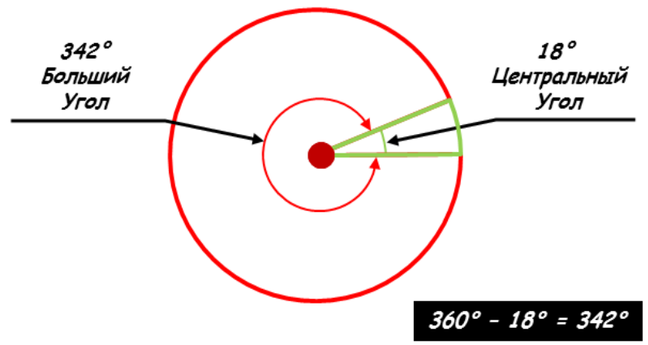
Учитель
- Так и есть. Дуга окружности измеряется градусной мерой центрального угла.
А теперь, ответь мне на вопрос: центральный угол равен 18-ти градусам. Чему равна дуга этого центрального угла?

Ученик
- Легко! Дуга, соответственно, будет равна 18-ти градусам. А я вот все думаю: у нас же получается два угла и две дуги. Есть же еще внешний угол – больший и соответствующая ему дуга.



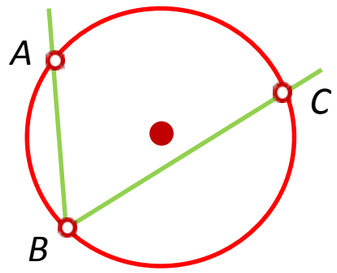
Учитель
- Вот молодец! Хорошо, что ты это заметил. Тогда можешь решить задачу, чему равен больший угол?

Ученик
- Если весь круг – 360 градусов и из него вырезали 18 градусов, то осталось 360 – 18 = 342 градуса. Значит, наш второй угол составляет 342 градуса и дуга окружности этого угла тоже 342 градуса.



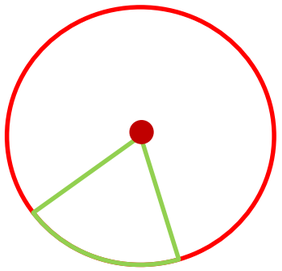
Учитель
- Молодец! Совершенно верно. Есть еще один очень важный угол. Его вершина лежит на окружности, а лучи пересекают эту окружность. Такой угол называют вписанным.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется вписанным в окружность.

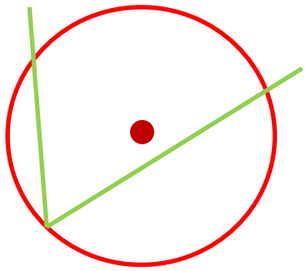


Ученик
- Понял. Если вершина угла находится в центре, то угол центральный, а если на окружности, то угол вписанный. Запомнил.

Центральный угол

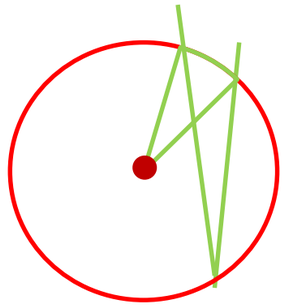


Вписанный угол



Учитель
- А если центральный и вписанный угол пересекают окружность в одних и тех же точках? Что ты можешь сказать о величине дуги, на которую они опираются?

Ученик
- Величина дуги совпадает с величиной центрального угла.



Учитель
- Правильно. А чему равен наш вписанный угол?

Ученик
- Дуга, на которую он опирается, равна величине центрального угла. Однако даже зрительно он значительно меньше, чем центральный угол.

Учитель
- Здесь нужно знать очень важное правило.

Ученик
- Я весь внимание…

Учитель
- Величина вписанного угла в два раза меньше величины дуги, на которую он опирается.

Ученик
- Правило довольно простое.

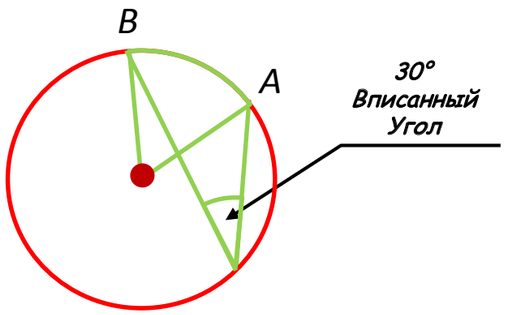
Величина вписанного угла в два раза меньше величины дуги, на которую он опирается.

Учитель
- Простое, но очень важное. Решение многих геометрических задач зависит от знания этого правила.

Ученик
- Смотрю в учебник. ЗАДАЧА: Центральный угол опирается на дугу АВ, вписанный угол также опирается на дугу АВ. Найти величину вписанного угла, если величина центрального угла 60 градусов.

Учитель
- Как будешь решать?

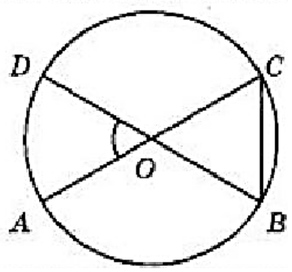
Ученик
- А что тут думать? Оба этих угла опираются на одну и ту же дугу. Используя наше очень важное правило, делим 60 на 2. Получаем 30. Ответ: величина вписанного угла 30 градусов.



Учитель
- Молодец. Теперь ты можешь решить большинство задач, которые связаны с темой круга, окружности и элементов круга. В них только нужно немного творчески подумать и отыскать связь углов и дуг, на которые они опираются. Часто даже творчества не нужно. Просто есть наработанные алгоритмы решения стандартных задач.

Учитель
- Открываем учебник. ЗАДАЧА.

Отрезки AC и BD - диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 44°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



Ученик
- Приведите пример.

Ученик
- Здесь я должен применять наши правила о величинах центрального и вписанного угла и дугах, на которые эти углы опираются. Что я вижу. Угол DOA и COB вертикальные, значит, они равны. Это правило я помню из предыдущих уроков.

Учитель
- Хорошо. Продолжай. Что еще ты заметил?

Ученик
- Дуга BC равна величине искомого угла. Значит, нам нужно найти величину этой дуги. Угол AOC развернутый, а значит, его величина равна 180 градусов.
Дуга BC равна 180 минус дуга AB. Дуга AB нам неизвестна, но нам известна величина вписанного угла, на которую он опирается. Этот угол в два раза меньше, чем дуга, на которую он опирается. Если угол 44 градуса, то, чтобы выполнялось наше очень важное правило, дуга должна составлять 88 градусов. Вспоминаем наше рассуждение раньше - дуга BC равна 180 минус дуга AB. Теперь нам дуга AB известна, она равна 88 градусов. Подставляем в наше рассуждение это значение, дуга BC равна 180 минус 88. Ответ: 92 градуса.

Учитель
- Вариантов решений, на самом деле, может быть несколько. Ты использовал этот. По-видимому, он для тебя понятней. В математических задачах это часто бывает. Главное, что ты получил правильный ответ. А значит…

Ученик
- Значит, я молодец!